

SCIENCE & VIE

MONDADORI FRANCE

Questions Réponses

HORS-SÉRIE | N°1
NOVEMBRE 2016

**LE COURS DE RATTRAPAGE
QUE VOUS N'ATTENDIEZ PLUS**

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

27 casse-tête et leurs solutions

**Petite histoire amusante
de l'algèbre**

**Coniques
et imaginaires**



M 03393 - 1H - F: 5,50 € - RD



BEL : 6,50€ - ESP : 6,50€ - GR : 6,50€
DOM S : 6,50€ - DOM A : 7€ - ITA : 6,50€
LUX : 6,50€ - PORT CONT : 6,50€
CAN : 8,95\$CAN - MAR : 65DH - TOM S : 800CFP
TOM A : 1600CFP - CH : 7,50FS - TUN : 13DTU

Pour mieux comprendre
le monde, lisez . . .

tangente

l'aventure mathématique



Le numéro 172,
en vente actuellement

Politique, économie, finance, jeux, musique, littérature, arts plastiques, architecture, informatique, physique, biologie, géographie : les mathématiques sont partout !

Le magazine *Tangente* et ses hors séries vous aident à redécouvrir notre quotidien.

Abonnez-vous à *Tangente*
et ses hors séries en deux formats
(« kiosque » et « Bibliothèque ») sur
www.librairie-archimede.com



NOUVEAU !
***Tangente* est disponible
en ligne sur**
www.tangente-mag.com



Le numéro hors série 61
en vente actuellement

L'accès numérique au numéro 167 vous est offert !
Rendez-vous sur www.tangente-mag.com (et inscrivez-vous)

Suivez *Tangente* (et « likez-le ») sur www.facebook.com/TangenteMag/



Les maths, on aime ou on n'aime pas. Mais pour le savoir, il faut mettre les mains dedans. Parmi les lecteurs de ce numéro, beaucoup s'y sont, jadis ou naguère, pincé les doigts. Souvenir cuisant... Certains, au lycée et au collège, baillent ou désespèrent. D'autres y trouvent leur plaisir. Ce numéro peut être profitable à chacun d'eux. Une reprise des bases, des aperçus nouveaux, drôles, étranges, des liens avec d'autres domaines, qu'on ne soupçonnait pas.

Pourquoi les équations du second degré, direz-vous ?

Parce que c'est un point de passage obligé dans le calcul algébrique. Pas de dextérité sans ça, pas d'espoir de déboucher sur l'analyse mathématique, c'est-à-dire sur l'immense domaine des fonctions.

Vous trouverez de tout dans ces pages. Des poètes, des fous, des rêveurs, des coccinelles et des pucerons, des embouteillages, les courbes d'un paysage désertique... Un inventaire à la Prévert, certes. Mais aussi une manière de poser encore et toujours les mêmes questions : la nature est-elle écrite en langue mathématique ? Ou bien cette langue n'est-elle qu'une invention de l'homme ? Dans ce cas, pourquoi marche-t-elle si merveilleusement pour décrire l'Univers ? À tous, ce petit bout de chemin dans un grand mystère.

CHARLES DE GRANRUT ET JEAN LOPEZ

Un hors-série du groupe



RÉDACTION

8, rue François-Orly
92543 Montrouge CEDEX
Tél. : 01 43 33 50 00 - Fax : 01 46 48 48 67

DIRECTEUR DE LA RÉDACTION : Jean Lopez

ASSISTÉ DE : Mireille Liébaux

SECRÉTAIRE DE RÉDACTION : Pierre-André Orillard

CONCEPTION GRAPHIQUE : Bertrand Le Port/Imhotep

ILLUSTRATIONS : Mo

SERVICE LECTEURS : sevlecteurs@mondadori.fr

ONT COLLABORÉ À CE NUMÉRO :

J.-P. Boudine, R. Cuculière, M. Dengreville, A. Djebbar,

O. Gérard, G. Godefroy, J. Lévy, J. Lubczanski, G. Pagès.

DIRECTION-ÉDITION

PRÉSIDENT : Ernesto Mauri

DIRECTION PÔLE : Carole Fagot

DIRECTEUR DÉLÉGUÉ : Vincent Cousin

DIFFUSION

DIRECTEUR DIFFUSION : Jean-Charles Guérault

RESPONSABLE DIFFUSION MARCHÉ : Siham Daassa

MARKETING/INTERNATIONAL

Gilanne Douts, Mathilde Janier-Bonnichon, Michèle Guillet

PUBLICITÉ

DIRECTEUR DÉCUTIF : Valérie Camy

CONTRACTS PUBLICITÉ : Virginie Commun (5028), Lionel Dufour (5019)

PLANNING : Angélique Consolet (5352), Stéphanie Guillard (5350)

TRAPIC : Véronique Barluet (5012)

OPÉRATIONS SPÉCIALES : Jean-Jacques Benezech

FABRICATION

Marie-Hélène Michon, Gérard-Laurent Greck

(CHEFS DE FABRICATION)

DIRECTEUR ADMINISTRATIF ET FINANCIER

Hervé Godard

FINANCE MANAGER

Guillaume Zaneskis

ÉDITEUR

Mondadori Magazines France

Siège social : 8, rue François-Orly,

92543 Montrouge Cedex

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION : Carmine Perna

ACTIONNAIRE : Mondadori France SAS

IMPRIMERIE : Elcograf - Italie

N° ISSN : 0151-0282

N° de commission paritaire : 0221 K 89294

Trimestriel

Tarif d'abonnement légal : 1 an, 4 numéros, 15 €

Dépôt légal : novembre 2016

ABONNEMENTS

DIRECTEUR : Christophe Ruet

DIRECTRICE MARKETING DIRECT : Catherine Grimaud

RESPONSABLE MARKETING DIRECT : Johanne Gavarini

RELATIONS CLIENTÈLE ABONNÉS

Par Internet : abo.sciencevie.fr

par téléphone : 01 46 48 48 96

(de 8 h à 20 h du lundi au samedi) ;

par courrier : Service abonnements Science & Vie,

CS 90125 - 27091 Evreux cedex 9

Par Internet : www.kiosquemag.com

Commandes d'anciens numéros : tél. 01 46 48 48 83



À CHAQUE ÂGE SON SCIENCE & VIE

ADULTES



LE MENSUEL LE PLUS LU DE FRANCE
avec près de 4 millions de lecteurs par mois
+ 4 hors-série et 2 spéciaux par an



**LES QUESTIONS DE LA VIE,
LES RÉPONSES DE LA SCIENCE**
4 numéros par an

ADOS À PARTIR DE 11 ANS



**LE MENSUEL PRÉFÉRÉ
DES ADOS**

**POUR CEUX QUI EN
VEULENT PLUS**
6 hors-série par an

DE 7 À 12 ANS



**POUR APPRENDRE
EN S'AMUSANT**
Mensuel

ABONNEZ-VOUS

KIOSQUE
mag

Disponible sur
KiosqueMag.com



ÉQUATIONS
DU SECOND
DEGRÉ

- 07 Le second degré, qu'est-ce que c'est ?**
Définition de la notion de second degré, et familiarisation avec le trousseau de clés à utiliser.
- 15 Peut-on s'en sortir sans formule ?**
Ou comment se sortir d'affaire quand on n'a pas gardé ses formules en tête.
- 19 Proies et prédateurs : pourquoi de tels écarts ?**
Pourquoi, d'une année sur l'autre, la prolifération des coccinelles ou des souris est-elle si différente ? Une petite équation toute simple permet de sonder ce caprice de la nature.
- 27 Comment l'algèbre a-t-il commencé ?**
Cinq mille ans pour percer tous les mystères du second degré. Une superproduction historique.
- 41 Et vous, où en êtes-vous ?**
Vingt-sept problèmes de difficulté progressive pour amateurs de casse-tête.
- 47 Au fond, c'est quoi une parabole ?**
La star des courbes mathématiques surprise en plein tournage.

- 53 De quels outils dispose-t-on ?**
Les trucs, les ficelles et les tours de main pour se simplifier le second degré.
- 63 Comment faire sauter les bouchons ?**
Quelle est la bonne vitesse à prendre pour éviter la formation d'un embouteillage ? Réponse étonnante, méthode séduisante.
- 71 Qu'est-ce que le théorème de Sturm ?**
Comment Charles-François Sturm a inventé la machine à torturer les polynômes.
- 79 Comment a-t-on basculé dans l'imaginaire ?**
En poussant le second degré, des monstres à deux têtes sont apparus sur la scène des maths. Pour ne plus jamais la quitter.
- 85 Connaissez-vous la famille des coniques ?**
Ellipses, paraboles, hyperboles, entrez dans le monde des courbes.
- 90 Solutions des problèmes**
À ne consulter qu'en dernière extrémité.



DÉCOUVREZ LA NOUVELLE CROISIÈRE

organisée par

SCIENCE & VIE

La croisière des Grands Bâtisseurs

**NOUVEAU
EN 2017**

CROISIÈRE À BORD
DU MSC FANTASIA

À PARTIR DE

1519€

(8 jours/7 nuits)

VOL AU DÉPART DE PARIS. CROISIÈRE,
FRAS DE SERVICE ET BOISSONS
INCLUSES AUX REPAS

DU 11 AU 18 FÉVRIER 2017

DUBAÏ ET LE SULTANAT D'OMAN

DUBAI

ABU DHABI

MASCATE

KHOR FAKKAN

SIR BANI YAS

Dubaï,
cité du III^e millénaire

PASSÉ, PRÉSENT, FUTUR UN PONT ENTRE LES ÂGES ET LES CIVILISATIONS

**LES
POINTS FORTS
de cette croisière
SCIENCE & VIE**

• UN ITINÉRAIRE ÉPOUSTOUFLANT

Entre dunes, mer turquoise et édifices qui tutoient le ciel et palaces historiques du temps des caravanes !

• DES CONFÉRENCES PASSIONNANTES



LES BÂTISSEURS

L'évolution des savoirs,
des techniques et
des outils au travers des
âges et des civilisations.



L'ARCHITECTURE

Les prouesses et les
défis des ingénieurs
et l'audace
des entrepreneurs !



LES NOUVELLES TECHNOLOGIES

Le traitement de l'eau,
l'agriculture en zone désertique,
le refroidissement de l'air.
Innovier et préserver...

DEMANDEZ VITE VOTRE DOCUMENTATION DÉTAILLÉE POUR PROFITER DE CETTE CROISIÈRE UNIQUE AVEC SCIENCE & VIE !

*Appelez-nous ! C'est rapide,
facile et cela n'engage à rien !*

TÉLÉCHARGEZ LA BROCHURE COMPLÈTE SUR

www.croisieres-lecteurs.com/sv

OU ÉCRIVEZ-NOUS EN RENVOYANT LE COUPON CI-DESSOUS.

INFORMATIONS & RÉSERVATIONS

01 41 33 59 80

DU LUNDI AU DIMANCHE DE 8h à 22h

COMPLÉTEZ, DÉCOUPEZ ET ENVOYEZ CE COUPON À SCIENCE & VIE CROISIÈRE DES GRANDS BÂTISSEURS - CS 90125 - 27091 EVREUX CEDEX 9

SCIENCE & VIE

☐ OUI, JE SOUHAITE RECEVOIR GRATUITEMENT ET SANS ENGAGEMENT LA DOCUMENTATION COMPLÈTE DE CETTE CROISIÈRE PROPOSÉE PAR SCIENCE & VIE.

NOM : _____ PRÉNOM : _____

ADRESSE : _____

CODE POSTAL : _____ VILLE : _____

TÉL. : _____ EMAIL : _____

☐ OUI, JE SOUHAITE BÉNÉFICIER DES OFFRES DE SCIENCE & VIE ET DE SES PARTENAIRES.

AVEZ-VOUS DÉJÀ EFFECTUÉ UNE CROISIÈRE (MARITIME OU FLUVIALE) ☐ OUI ☐ NON

CONFORMÉMENT À LA LOI "INFORMATIQUE ET LIBERTÉ" DU 6 JANVIER 1978, NOUS VOUS INFORMONS QUE LES RENSEIGNEMENTS CI-DESSUS SONT INDISPENSABLES AU TRAITEMENT DE VOTRE COMMANDE ET QUE VOUS DISPOSEZ D'UN DROIT D'ACCÈS, DE MODIFICATION, DE RECTIFICATION ET DE SUPPRESSION DE CES DONNÉES PAR SIMPLE COURRIER. CRÉDITS PHOTOS : MSC CROISIÈRES ET ISTOCK. CETTE CROISIÈRE EST ORGANISÉE EN PARTENARIAT AVEC MSC CROISIÈRES.
LICENCE MSC : IM 075100262

SCIENCE & VIE EST UNE PUBLICATION DU GROUPE MONDADORI FRANCE, SIÈGE SOCIAL : 8 RUE FRANÇOIS DRY - 92543 MONTROUGE CEDEX.



CHUSTRIP



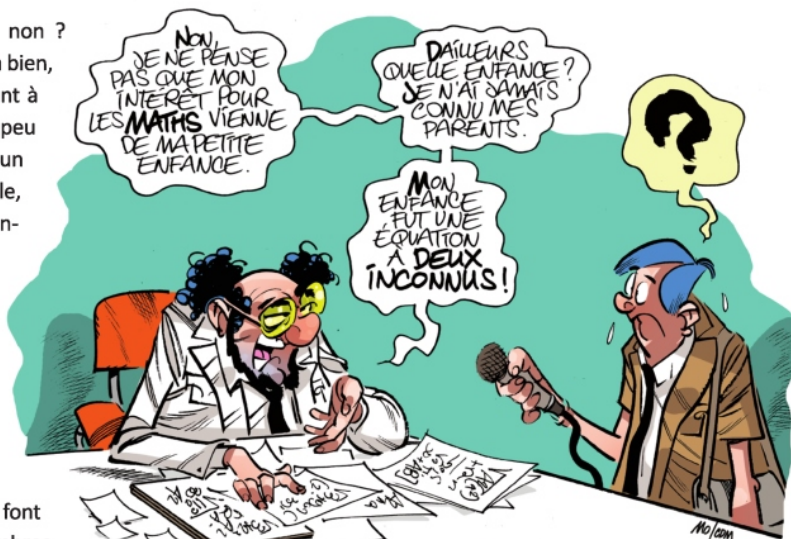
LE SECOND DEGRE, QU'EST- CE QUE C'EST ?

**Vous aimez les énigmes à tiroirs et les vieux coffres à mystères ?
Et vous voudriez résoudre sans peine les équations
du second degré ? Alors vous allez être doublement servis.
L'art de faire avouer une équation en triturant les serrures.**

CHARLES DE GRANRUT et JEAN LOPEZ



La clé de l'énigme : curieuse expression, non ? Comme si une énigme était une serrure. Eh bien, les équations du second degré ressemblent à des énigmes à serrure. Et le potache est un peu dans la posture du cambrioleur : à sa ceinture pend un trousseau de clés. Laquelle est la bonne ? On farfouille, on titille, on essaie et, clic, tiens celle-ci marche. Bingo ! Voilà le coffre ouvert, l'équation résolue. L'énigme, c'est, par exemple, la « phrase » $x^2 - 8x + 15 = 0$ qu'on appelle une équation. Procédons comme pour un message chiffré. La phrase se compose de huit signes. On en connaît six depuis la maternelle : $-$, $+$, $=$, 8 , 15 et 0 , n'insistons pas. L'inconnue, c'est ce x . Tout est là. Notre mission est claire : trouver le ou les nombres qui se cachent derrière x et qui font que l'ensemble de la « phrase » est égal à 0 . Ces nombres cachés sont les « racines » de l'équation. Identifions-les.



PREMIER ACTE

Méfiance... Avant de nous lancer dans l'aventure, demandons-nous s'il existe une clé pour le coffre : x cache-t-il vraiment quelque chose dans l'ensemble $\mathbb{R}$ (zoom ci-dessous) ? Laissons tomber le « $= 0$ » et scrutons le trinôme $x^2 - 8x + 15$. L'évangile selon saint Matheux nous servira de guide. Il proclame d'entrée de jeu que l'existence des racines d'un trinôme dépend de la factorisation de ce trinôme en un produit de deux facteurs du premier degré. Gloups ! Cette phrase est un peu dure à avaler. Pourtant, il faut coûte que coûte la comprendre. Deux mots demandent un coup de projecteur.

Vous avez dit trinôme ?

Le mot trinôme vient du grec en passant par le latin. En gros, trinôme signifie « expression mathématique à trois (tri) termes (nôme) ». Autrement dit, c'est une phrase qui a trois mots. En

ZOOM

$\mathbb{R}$ désigne ici tous les nombres réels et pas seulement les entiers comme 1 ; 2 ; 7 ou -5 . On peut très bien tomber sur $1/2$; $-5/7$ ou $1,3333...$ et même sur des plus curieux comme π (dont $3,14$ n'est qu'une valeur approchée).

ZOOM

Multiplier un nombre x par lui-même à plusieurs reprises est une opération qui revient très souvent. Plutôt que d'écrire $x \times x$, on écrit x^2 . Le petit 2 là-haut à droite est l'exposant ; il dit le degré.

pratique un trinôme se reconnaît à l'œil grâce à sa forme qui est du genre : $ax^2 + bx + c$. Toutes les lettres (a , b , c , et x) sont en réalité des nombres. Mais attention : a , b et c sont des nombres « fixes », appelés coefficients, tandis que x , l'inconnue, est « non fixé », c'est la « variable ».

Exemples :

- $2x^2 + 8x + 6$ est un trinôme dans lequel $a = 2$; $b = 8$ et $c = 6$.
- $x^2 + 2x + 1$ où $a = 1$; $b = 2$ et $c = 1$.
- $3x^2 - 3$ où $a = 3$; $b = 0$ et $c = -3$.
- $x^2 + 2x$ où $a = 1$; $b = 2$ et $c = 0$.

(voir test 1).

Remarquez que b et c peuvent être nuls. Mais jamais a , car si non, il ne resterait que $bx + c$. Et on aurait alors quitté le second degré. Quèsaco, le second degré ? Simple : c'est une « phrase » mathématique où la variable x apparaît dotée de l'exposant 2 . x tout seul, c'est du premier degré ; x^2 (zoom ci-dessus), c'est du second degré ; x^3 serait du troisième degré, etc.

TEST 1. questions

Pour chacun des trinômes suivants reconnaissez les coefficients a , b et c .

- | | | |
|--------------------|------------------------------|----------------------|
| 1) $3x^2 + 3x + 3$ | 2) $x^2 - 7x - 5$ | 3) $-2x^2 + 4$ |
| 4) $-x^2 - x$ | 5) $\frac{1}{2}x^2 + 6x - 1$ | 4) $-\frac{5}{7}x^2$ |

Réponses page 12

► Factoriser, qu'est ce que c'est ? ◀

Toto a un long nez et des cheveux roux. Normal, il ressemble à ses parents, Lulu et Rita. Un matheux dirait que Toto est le produit de deux facteurs : Lulu au grand nez multiplié par Rita la rousse. Factoriser un trinôme revient un peu à ce jeu de physiognomies : retrouver les « parents » du trinôme, revenir en arrière dans la généalogie de Toto. Avec des nombres, cela donne, par exemple, $6 = 2 \times 3$. Évident, non ? Mais si l'on donne simplement 6, pour retrouver ses parents, il faut enclencher la marche arrière du calcul. 6 est « engendré » par 2×3 . Factoriser 6, c'est donc le remplacer par 2×3 .

Un peu moins évident : $10x + 5$. Avec un peu de nez et d'entraînement, il vous sautera aux yeux que $10x + 5$ est égal à 5 fois $(2x + 1)$ et peut donc s'écrire $5(2x + 1)$.

Un petit dernier : $x^2 + 3x + 2$.

Ce trinôme du second degré est le produit de deux facteurs du premier degré $(x + 1)$ et $(x + 2)$.

Nous écrivons :

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

Vous pouvez vérifier en calculant :

$$(x + 1)(x + 2) = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2.$$

(voir test 2).

Les équations du second degré ressemblent à des énigmes à serrure.

TEST 2. questions

Voici des produits de binômes à mettre sous la forme $ax^2 + bx + c$:

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1) $(2x - 1)(x + 1)$ | 2) $(3 - x)(x + 1)$ |
| 3) $(x + 2)(1 - x)$ | 4) $(3x + 1)(2x - 1)$ |
| 5) $(2x + 3)(3x - 1)$ | 6) $(5x - \frac{1}{2})(x + \frac{3}{2})$ |
| 7) $(x - \frac{3}{2})(x + 1)$ | 8) $(\frac{1}{2} - x)(\frac{3}{2} - x)$ |

Réponses page 12

► On peut tout de suite résoudre une énigme ◀

Nos efforts sont déjà payants. Posons le problème : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Remplaçons-la par la forme factorisée découverte quelques lignes plus haut : $x^2 + 3x + 2 = 0$ devient ainsi $(x + 1)(x + 2) = 0$.

Or, l'évangile selon saint Matheux, verset 2, proclame ceci :



» pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit qu'un des facteurs soit nul.

L'équation va donc s'annuler pour $x + 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$. D'où les deux valeurs de x qui sont racines de cette équation $x' = -1$ et $x'' = -2$.

Vérifiez en remplaçant x dans l'équation par -1 puis par -2 . Vous devez dans les deux cas trouver 0.

C'est tout, direz-vous ? Résoudre une équation du second degré, c'est facile comme bonjour ! Pas si vite. Factoriser le trinôme n'est pas toujours simple... et pas toujours possible, comme vous allez le découvrir.

► Le facteur cambrioleur ◀

Le dilemme est le suivant : un voleur se trouve devant un coffre doté d'une serrure rétive. Il dispose de trois clés, trois « rossignols » comme on dit dans le jargon des cambrioleurs. Lequel utiliser ? Le monte-en-l'air, lui, les repère à l'œil. Nous allons faire comme lui pour factoriser les trinômes. Car, nous aussi, nous disposons de trois rossignols pour forcer les serrures mathématiques ! On appelle ces clés miracles des « identités remarquables ». Il est indispensable de les connaître sur le bout des doigts pour devenir un fin chasseur d'équations. Les voici :

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= (A + B)(A - B) \\ (A + B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\ (A - B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2 \end{aligned}$$

Mettons en pratique nos nouveaux talents de forceurs de coffres. La première serrure à ouvrir est $3x^2 - 12$.

Toto, fils de Lulu et de Rita, vous vous souvenez ? C'est le moment de factoriser : $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x^2 - 2^2)$. Maintenant, un coup d'œil à notre trousseau de rossignols. Pas besoin d'avoir troué les coffres de la Banque de France pour remarquer que $x^2 - 2^2$ ressemble comme deux gouttes d'eau à $A^2 - B^2$.

Écrivons donc que :

$$x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2).$$

En revenant à notre serrure et en remplaçant ce qui doit l'être, on trouve :

$$3x^2 - 12 = 3(x + 2)(x - 2).$$

À partir de là vous connaissez le refrain. Si l'on a pu factoriser le trinôme en un produit de deux facteurs du premier degré, on tient les deux racines. Elles sont les nombres qui annulent les

Devant une serrure rétive, le voleur dispose de trois clés : laquelle utiliser ?

deux facteurs. Pour que $x + 2 = 0$, il faut $x = -2$. Pour que $x - 2 = 0$, il faut $x = 2$. Faites les vérifications d'usage en remplaçant x par -2 puis par 2 dans l'expression $3x^2 - 12$.

Une deuxième serrure à trafiquer : $x^2 + 6x + 9 = 0$. Factorisons le trinôme $x^2 + 6x + 9$. On observe deux choses : il n'y a que des +, et le 9 peut s'écrire sous la forme d'un carré $9 = 3^2$. Recoup d'œil au trousseau des identités remarquables. Oui ! Le trinôme $x^2 + 6x + 3^2$ ressemble à $A^2 + 2AB + B^2$. Nous y sommes. Remplaçons le trinôme par sa forme factorisée :

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 2 \times 3x + 3^2 \\ &= (x + 3)^2 \\ &= (x + 3)(x + 3). \end{aligned}$$

Tiens ! deux facteurs identiques. Les deux solutions auront donc la même valeur : -3 .

(voir test 3).

► Aïe, aucun rossignol ne semble aller dans la serrure ◀

Restons dans le monde de la cambriole. Voici une serrure patibulaire : $2x^2 + 8x + 12$.

Tâtonnons, essayons successivement nos trois identités remarquables. Rien ne vient ! Que faire ? C'est simple : trouver le rossignol dont la forme se rapproche le plus de la serrure à ouvrir.

TEST 3. questions

Chacune des équations suivantes peut se résoudre en utilisant une identité remarquable. À vous de jouer :

1) $x^2 + 2x + 1 = 0$

2) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

3) $4x^2 - 9 = 0$

4) $x^2 + 6x + 9 = 0$

5) $x^2 - 4 = 0$

6) $4x^2 + 8x + 4 = 0$

7) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

8) $9x^2 - 4 = 0$

9) $x^2 - 6x + 9 = 0$

10) $x^2 + 10x + 25 = 0$

Réponses page 12



Voyons, par exemple, si l'on peut « calquer » :

$$2x^2 + 8x + 12 \text{ sur } A^2 + 2AB + B^2.$$

Bricolons un peu dans les règles de l'art :

$$2x^2 + 8x + 12 = 2(x^2 + 4x + 6)$$

ensuite, on calque
(pour le 6 on verra plus tard).

Et on cogite :

si $x^2 = A^2$, alors $A = x$,
et si $A = x$, alors $2AB = 2xB$.
Le calque disant $2AB = 4x$,
bien obligé de conclure $2xB = 4x$.

Rien ne nous empêche de l'écrire $2xB = 2 \times 2x$.

Et puisqu'on a $2x$ de chaque côté, bien forcé de conclure que $B = 2$.

Calculons donc $(A + B)^2$ ou plutôt $(x + 2)^2$ puisque $A = x$ et $B = 2$. Ça donne $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

L'idée c'est de sortir de là l'ensemble $(x^2 + 4x)$ pour l'introduire dans le trinôme de départ à peine bricolé :

$$2(x^2 + 4x + 6).$$

Comment faire ? Facile : pesons tout ça sur les plateaux d'une balance imaginaire. À gauche, le carré $(x + 2)^2$, à droite la forme développée $x^2 + 4x + 4$: assurément la balance est en équilibre. En ajoutant (-4) sur chaque plateau l'équilibre est conservé.

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

devient : $(x + 2)^2 + (-4) = x^2 + 4x + 4 + (-4)$.

Soit $(x + 2)^2 - 4 = x^2 + 4x$. Maintenant, $x^2 + 4x$ se remplace par $(x + 2)^2 - 4$ dans notre trinôme de départ :

$$2(x^2 + 4x + 6) = 2((x + 2)^2 - 4 + 6)$$

(retour du 6).

Enfin :

$$2(x^2 + 4x + 6) = 2((x + 2)^2 + 2).$$

➤ Que conclure <

Aïe, aïe, aïe... Que se passe-t-il ? Nous avons fait le maximum et, pourtant, nous n'avons pas pu remplacer le trinôme par un produit de facteurs du premier degré. Est-ce un échec ? Pas tout à fait. Notre matière grise peut quand même sortir quelque chose d'utile de ce $2((x + 2)^2 + 2)$.

Analysons. 2 est un nombre positif. D'autre part, $(x + 2)^2$ est aussi positif (ou nul). Le règlement c'est le règlement, un carré n'a qu'à obéir et pas faire le malin : il est toujours positif ! En multipliant du positif par du positif, on obtient encore du positif (zoom).

Résumé : le trinôme $2x^2 + 8x + 12$ **ne peut pas** être égal à 0 puisqu'il est strictement **positif** pour toute valeur de x . Par voie de conséquence, il **ne peut pas** être factorisé car si on pouvait le factoriser il pourrait s'annuler comme nous l'avons déjà vu une douzaine de fois.

Conclusion :

l'équation $2x^2 + 8x + 12 = 0$ n'admet aucune solution, mais le signe du trinôme $2x^2 + 8x + 12$ est connu (positif) (voir test 4 p. 12).

Une pause s'impose. Nous savons résoudre les équations

ZOOM

La règle des signes doit être impérativement respectée dans toute multiplication (et division). On fait comme on veut, ou comme on peut, mais on la connaît sur le bout des doigts :

+ par + donne +
- par - donne +
+ par - donne -
- par + donne -

»

TEST 4. questions

Quelques trinômes qui ne peuvent pas être factorisés, mais dont vous pourrez découvrir le signe après les avoir mis sous la bonne forme :

- | | |
|----------------------|------------------------------|
| 1) $x^2 - 2x + 2$ | 2) $x^2 + 6x + 11$ |
| 3) $4x^2 + 4x + 2$ | 4) $9x^2 + 12x + 7$ |
| 5) $2x^2 + 12x + 20$ | 6) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ |
| 7) $-3x^2 + 6x - 15$ | 8) $-x^2 - 4x - 5$ |

Réponses ci-dessous

du second degré : un bon point. Mais, dans certains cas, nous trouvons deux solutions, dans d'autres une seule, dans d'autres enfin aucune : et ça, nous ne sommes pas encore capables de le prévoir ! La « méthode des rossignols » marche mais elle ressemble fichtrement à du bricolage de myope dans le brouillard. Il nous faut trouver d'autres outils, plus efficaces, plus rapides et, disons-le, plus élégants. Le prix ? Lire la suite, mais vous n'êtes pas obligé de le faire sur-le-champ. Vous pouvez déjà attaquer les problèmes de la page 41.

SECOND ACTE

Question : « À quelle condition et comment peut-on factoriser le trinôme $T_{(a)} = ax^2 + bx + c$? »

À noter : les « coefficients » a, b et c sont des nombres réels ; de surcroît, on prend soin de préciser « a différent de zéro » afin que le terme au carré ne disparaisse pas.

Primo, puisque a n'est pas nul, on peut le mettre en facteur :

$$T_{(a)} = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right).$$

Pour les débutants, il est bon de vérifier qu'en développant on retrouve : $ax^2 + bx + c$.

Secundo, utilisons la même médecine que précédemment : le calque.

$$T_{(a)} = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right).$$

calque
(pour $+\frac{c}{a}$ on verra plus tard).

RÉPONSES

TEST 1

- | | | |
|-----------------------|----------|----------|
| 1) $a = 3$ | $b = 3$ | $c = 3$ |
| 2) $a = 1$ | $b = -7$ | $c = -5$ |
| 3) $a = -2$ | $b = 0$ | $c = 4$ |
| 4) $a = -1$ | $b = -1$ | $c = 0$ |
| 5) $a = \frac{1}{2}$ | $b = 6$ | $c = -1$ |
| 6) $a = -\frac{5}{7}$ | $b = 0$ | $c = 0$ |

TEST 2

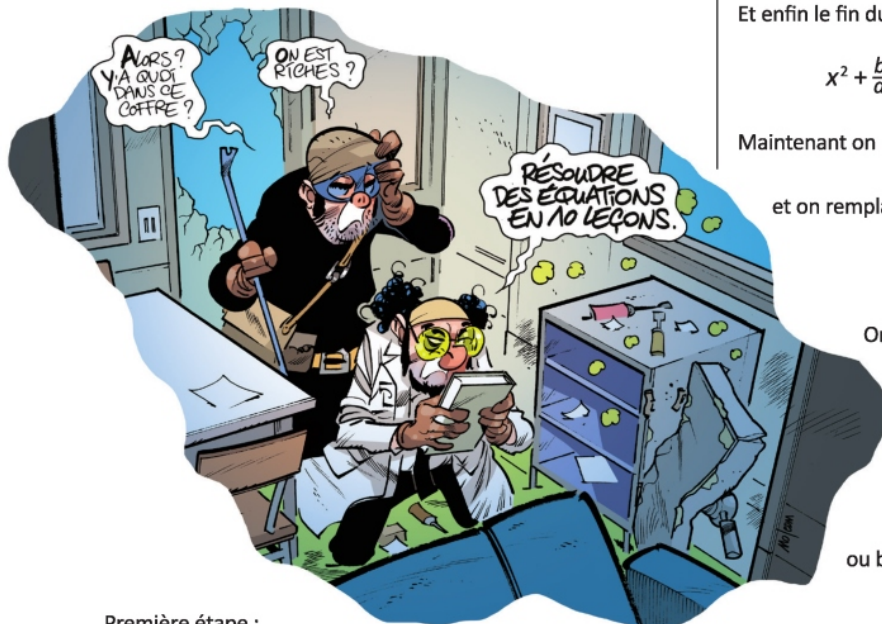
- | | |
|---------------------------------------|------------------------------|
| 1) $2x^2 + x - 1$ | 2) $-x^2 + 2x + 3$ |
| 3) $-x^2 - x + 2$ | 4) $6x^2 - x - 1$ |
| 5) $6x^2 + 7x - 3$ | 6) $5x^2 + 7x - \frac{3}{4}$ |
| 7) $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ | 8) $x^2 - 2x + \frac{3}{4}$ |

TEST 3

- | | |
|---|---|
| 1) $(x+1)^2 = 0$, d'où $x' = x'' = -1$ | 2) $(2x-1)^2 = 0$, d'où $x' = x'' = \frac{1}{2}$ |
| 3) $4x^2 - 3^2 = (2x+3)(2x-3) = 0$, d'où $x' = -\frac{3}{2}$; $x'' = \frac{3}{2}$ | |
| 4) $(x+3)^2 = 0$, d'où $x' = x'' = -3$ | |
| 5) $x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2) = 0$, d'où $x' = -2$; $x'' = 2$ | |
| 6) $4(x^2 + 2x + 1) = 4(x+1)^2 = 0$, d'où $x' = x'' = -1$ | |
| 7) $(3x-1)^2 = 0$, d'où $x' = x'' = \frac{1}{3}$ | |
| 8) $(3x)^2 - 2^2 = (3x+2)(3x-2) = 0$, d'où $x' = -\frac{2}{3}$; $x'' = \frac{2}{3}$ | |
| 9) $(x-3)^2 = 0$, d'où $x' = x'' = 3$ | 10) $(x+5)^2 = 0$, d'où $x' = x'' = -5$ |

TEST 4

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $(x-1)^2 + 1$; positif | 2) $(x+3)^2 + 2$; positif |
| 3) $(2x+1)^2 + 1$; positif | 4) $(3x+2)^2 + 3$; positif |
| 5) $2((x+3)^2 + 1)$; positif | 6) $\frac{1}{2}((x+2)^2 + 2)$; positif |
| 7) $-3((x-1)^2 + 4)$; négatif | 8) $-((x+2)^2 + 1)$; négatif |



Première étape :

$$x^2 = A^2 \text{ donne } A = x.$$

Deuxième étape :

$$2AB = \frac{b}{a}x \text{ devient } 2xB = \frac{b}{a}x,$$

$$\text{soit } 2B = \frac{b}{a} \text{ qui donne } B = \frac{b}{2a}.$$

$$\text{Ensuite, on calcule } (A+B)^2, \text{ c'est-à-dire } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

ce qui donne :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2x \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

En simplifiant :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

d'où on tire :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x.$$

Et enfin le fin du fin :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}.$$

$$\text{Maintenant on reprend } T_{(x)} = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

et on remplace $x^2 + \frac{b}{a}x$ par ce qu'on vient de trouver :

$$T_{(x)} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right].$$

On réduit au même dénominateur :

$$T_{(x)} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Enfin :

$$T_{(x)} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \quad (i)$$

ou bien :

$$T_{(x)} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \quad (j)$$

(i) et (j) c'est la même chose ; on a juste un peu modifié les signes de la fraction. Et ça s'appelle la **forme canonique**.

> Zoom sur Δ <

La quantité $b^2 - 4ac$ sera désormais notée Δ (grand delta). $\Delta = b^2 - 4ac$ est le « **discriminant** » du trinôme.

Et la factorisation de $T_{(x)}$ dans tout ça ? Justement, le plus dur est fait.

Il suffit d'y regarder de près pour conclure... en trois étapes, ou trois cas comme préfèrent dire les mathématiciens.

Premier cas : celui où $\Delta < 0$ (delta négatif).

Avant tout, remarquez bien que si $b^2 - 4ac = \Delta$ alors $4ac - b^2 = -\Delta$ et aussi que si $\Delta < 0$ alors $-\Delta > 0$.

Ceci posé, examinons bien la forme canonique (i), cuisinée à la sauce delta :

$$T_{(x)} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \text{ est positif parce que c'est un carré.}$$

$$\frac{-\Delta}{4a^2} \text{ est aussi positif.}$$

LE SECOND DEGRÉ, QU'EST-CE QUE C'EST ?

» Donc $T_{(x)}$ est **positif et jamais nul** (« strictement » positif, disent les mathématiciens).

Ceci a deux conséquences :

- 1) $T_{(x)} = 0$ (c'est l'équation du second degré) n'a pas de solution.
- 2) Le trinôme $T_{(x)}$ est toujours du signe de « a », quelle que soit la valeur de x .

Deuxième cas : celui où $\Delta = 0$ (delta nul).

La forme canonique montre que le trinôme se réduit à :

$$T_{(x)} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2,$$

ou si vous voulez :

$$T_{(x)} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} \right).$$

Ceci a deux conséquences :

- 1) $T_{(x)} = 0$ a deux fois la même solution (on dit aussi « racines »)

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}.$$

- 2) Le trinôme $T_{(x)}$ est toujours du signe de « a », sauf pour

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ où on a } T\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0.$$

Troisième cas : celui où $\Delta > 0$ (delta positif).

Dans ce cas on peut toujours dire que Δ est le carré de sa racine carrée :

$$\Delta = (\sqrt{\Delta})^2.$$

Et la forme canonique (j) s'écrit :

$$T_{(x)} = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \right]$$

ou mieux :
$$T_{(x)} = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right].$$

Regardez bien, ceci est une différence de deux carrés. Comme $A^2 - B^2$, la fameuse identité remarquable, dont nous savons qu'elle est égale à $(A + B)(A - B)$.

Appliquons :

$$T_{(x)} = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right].$$

Retirons les parenthèses sans crainte :

$$T_{(x)} = a \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right).$$

Quelle chance ! dans tous les termes constants le dénominateur est le même « $2a$ ». Profitons-en :

$$T_{(x)} = a \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right).$$

Que personnellement je préfère écrire (simple modification de signes) :

$$T_{(x)} = a \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right).$$

Ceci a deux conséquences :

- 1) L'équation $T_{(x)} = 0$ a deux racines distinctes :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- 2) Le signe du trinôme s'obtient au moyen d'un tableau dans lequel les valeurs frontières sont les deux racines x' et x'' :

x	x'		x''					
$x - x'$	-	0	+	+				
$x - x''$	-	-	0	+				
$(x - x')(x - x'')$	+	0	-	0	+			
$T_{\infty} = a(x - x')(x - x'')$	signe de « a »		0	signe de « $-a$ »		0	signe de « a »	

Conclusion : lorsque Δ est positif, le trinôme est du signe de a pour les valeurs de x extérieures aux racines et du signe de $-a$ pour les valeurs de x comprises entre les racines.

Voilà, les missions sont remplies. Vous avez tout en main pour attaquer gaillardement les problèmes qui vous attendent page 41. ■



PEUT-ON S'EN SORTIR SANS FORMULE ?

Si vous avez oublié les formules du cours de maths
qui permettent de résoudre une équation du second degré,
voici un truc simple pour pallier votre trou de mémoire.
Sortez votre calculette.

OLIVIER GÉRARD



$$\left(\text{noeud} + \text{noeud} \right) + \text{corde} - \text{corde} + \left[\frac{[\text{oreille} + \text{oreille}]^2}{2} \right] = \text{homme}$$

Un jour, entre rêve et cauchemar, je me retrouve seul sur une barque au beau milieu d'un lac. Il fait nuit noire et j'ai perdu mes rames. Je ne sais plus quoi faire à part claquer des dents. Je voudrais bien sauter à l'eau et nager jusqu'au bord, mais je ne sais pas à quelle distance est le rivage et, question natation, je ne vauds pas tripette. Heureusement, j'ai avec moi une corde et quelques cailloux.

J'attache un caillou à un bout de la corde, mesure 20 longueurs de bras à partir du caillou et fais un nœud. Pour plus de sûreté, j'amarre l'autre extrémité au banc de la barque. Je prends mon souffle et lance la pierre de toutes mes forces vers la rive. À la grâce de Dieu !

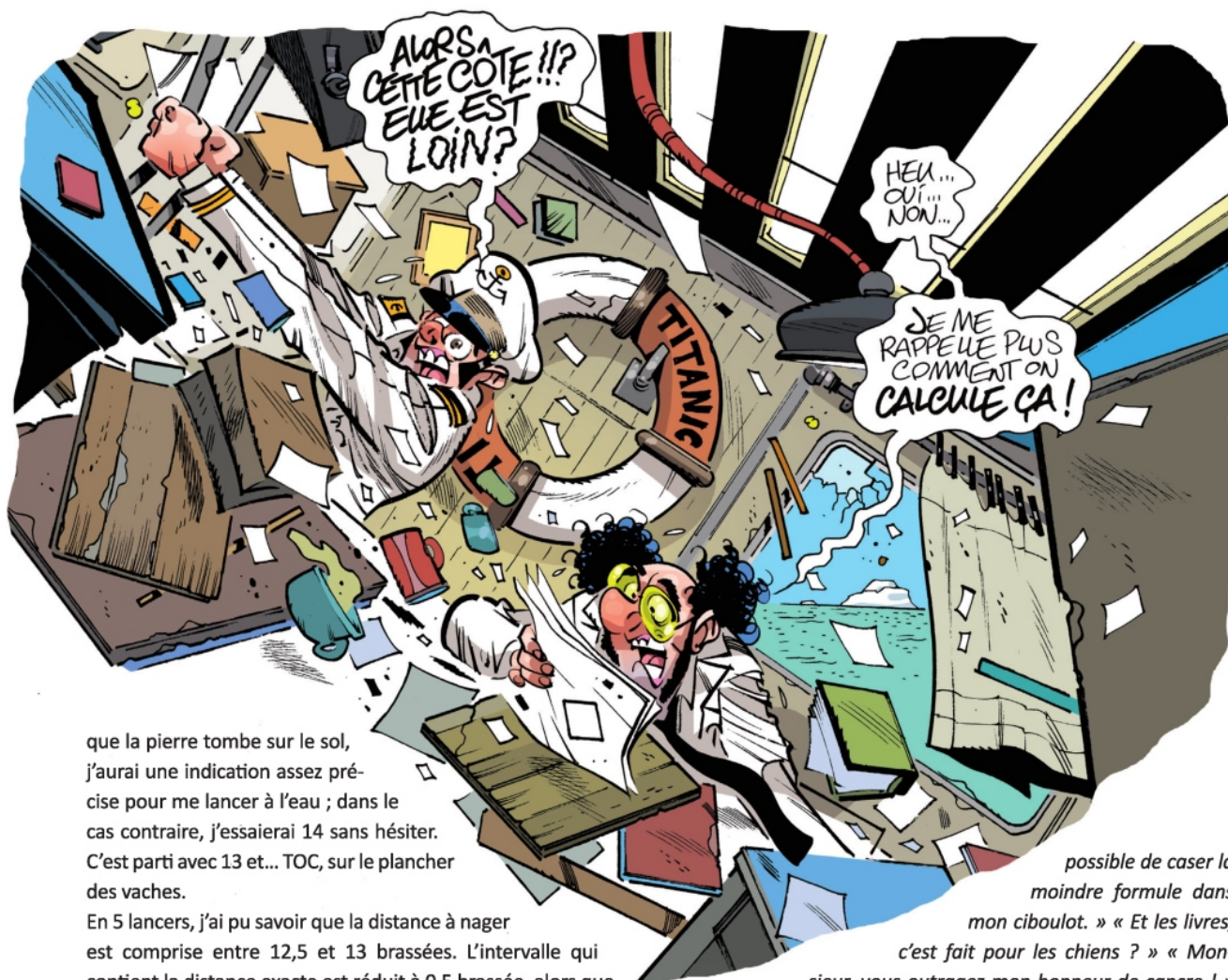
La cordelette se déroule jusqu'au nœud puis j'entends un grand TOC. Le caillou a rencontré la berge. Ouf, elle est donc à moins de 20 brassées ! Je tire sur la corde et récupère tout mon système. Je défais le nœud et, ce coup-ci, je compte 10 longueurs de bras avant de rattacher la corde. À nouveau je lance la pierre et, là, un gros PLOUF retentit. Je suis un peu déçu : le rivage n'est pas si près que ça. Mais maintenant je sais que je devrai nager entre 10 et 20 brassées avant d'atteindre la rive. Si 10 ne me font pas peur, 20 m'effraient un peu. Je veux donc mesurer la distance qui me sépare de la terre ferme à une brassée près, histoire de ne pas me lancer au hasard. Je n'ai pas du tout envie de répéter l'opération pour 11 longueurs de bras, puis 12, puis 13, etc., jusqu'à 19. Je choisis donc de faire un nouvel essai pour 15 brassées : TOC sur la terre ferme. La rive est donc « encadrée » entre 10 et 15 brassées. L'espoir luit :

15 brassées c'est encore un peu dur mais ça devient possible. Allons, encore un essai, mais quelle longueur choisir ? Bien sûr le « milieu » entre 10 et 15 ! Et voilà le nœud fait à 12,5 brassées. Nouveau lancer, c'est le quatrième et je fatigue un peu. PLOUF fait le caillou : je devrai donc nager au moins 13 brassées car je ne sais pas faire de demi-brassées.

La logique voudrait que je fasse l'essai suivant avec une longueur qui corresponde au milieu du dernier intervalle « TOC-PLOUF » (12,5 à 15), ce qui fait 13,75 brassées. Mais compter 0,75 brassée, est-ce bien utile ? Je souhaite « arrondir » et ne vois pas de raison sérieuse de choisir entre 13 et 14. Pourtant, si je choisis 13 et

En 5 lancers, j'ai pu savoir que la distance à nager est comprise entre 12,5 et 13 brassées.





que la pierre tombe sur le sol, j'aurai une indication assez précise pour me lancer à l'eau ; dans le cas contraire, j'essaierai 14 sans hésiter. C'est parti avec 13 et... TOC, sur le plancher des vaches.

En 5 lancers, j'ai pu savoir que la distance à nager est comprise entre 12,5 et 13 brassées. L'intervalle qui contient la distance exacte est réduit à 0,5 brassée, alors que 4 lancers avant, il était de 20 brassées : une division par 40, au prix d'un travail... mesuré. Le jeu en valait la chandelle, pour si peu de moyens mis en œuvre.

➤ À l'eau, les inconnues ! ◀

Mais mon rêve change de forme lorsque Théotime pointe le bout de son nez. Le bougre est encore contrarié par son prof de maths qui l'a puni d'une équation du second degré. C'est chronique. « J'ai pas plus de mémoire qu'un piaf, se lamente-t-il. Im-

possible de caser la moindre formule dans mon ciboulot. » « Et les livres, c'est fait pour les chiens ? » « Monsieur, vous outragez mon honneur de cancre ! »

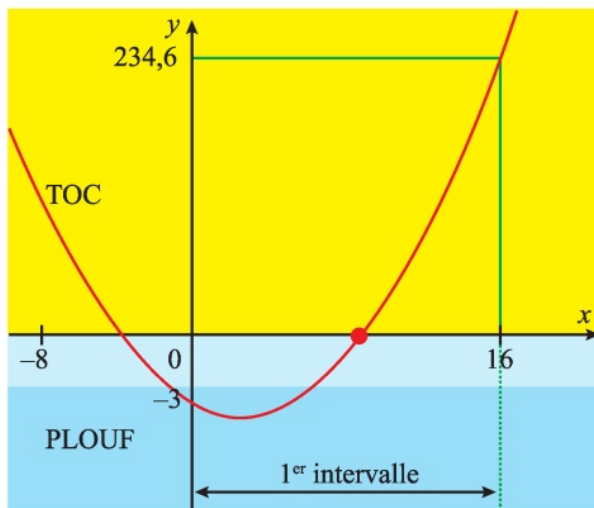
Bon, il est indécrottable. Voyons l'équation en question :

$$x^2 - 1,15x - 3 = 0.$$

Théotime, qui sait juste que cette équation a une racine négative et l'autre positive, doit donner une valeur au moins approchée pour chacune de ces racines. J'entre dans son jeu. Cool Théotime, on peut faire sans formules... mais un petit dessin met les idées en place.

»»

»



La courbe en forme de bol représente la fonction :

$$f(x) = x^2 - 1,15x - 3.$$

Ce que Théotime doit trouver, c'est la position de la surface de l'eau sur le bord du bol. (Qu'est-ce que l'eau vient faire là-dedans ? Mon rêve de lac et de bateau peut-être...). Fixez votre attention sur le bord droit, là où je place un gros point qui représente la racine positive. On va maintenant la cerner.

- Je calcule $f(0)$, c'est-à-dire que je remplace x par zéro. Ça donne $f(0) = -3$. PLOUF ! dans l'eau, pardon dans le négatif.
- Maintenant je calcule $f(16)$. Sortons la calculette. Tapons 16, puis touche x^2 , puis $-1,15$ multiplié par 16 et finalement -3 . Résultat 234,6 et TOC, positif. La racine est **entre** 0 et 16. D'accord, c'est peu précis mais voyons la suite.
- Maintenant je calcule $f(8)$. Clic clic sur la calculette : 51,8. TOC : la racine est entre 0 et 8.
- Ensuite je veux $f(4)$: 4, touche x^2 , $-1,15 \times 4$, puis $-3 = 8,4$. Re-TOC ! La racine est entre 0 et 4. Ça se resserre, la méthode est bonne. Encore un pas : $f(2)$. Clic-clic = $-1,3$: PLOUF dans le négatif. Elle ne nous échappera pas ! Elle est entre 2 et 4. À nouveau je vais taper **au milieu** de cet intervalle.

- $f(3) = 2,55$: TOC, racine entre 2 et 3. Théotime est aux anges. Pas de formules, juste un peu de calculette, le rêve !
- À nouveau je **coupe en deux** : $f(2,5) = 0,375$ TOC, la racine est entre 2 et 2,5.

« Stop, fait Théotime tout sourire. Un résultat approché à 0,5 me suffit. Je crois même que je pourrai trouver tout seul l'autre racine grâce à cette méthode. Au fait, c'est quoi son nom ? » « La dichotomie, d'un mot grec qui signifie "division par deux". »

Ci-contre, la réponse de Théo. Mais essayez donc vous-même. Petit coup de main : commencez par calculer $f(-8)$, compté pour un coup, et donnez la réponse après le cinquième coup. ■

RÉPONSE

Théotime se souvient que $f(0) = -3$.
 PLOUF, il calcule : $f(-8) = 70,2$.
 TOC : racine entre -8 et 0 .
 2^e coup : $f(-4) = 17,6$.
 TOC : racine entre -4 et 0 .
 3^e coup : $f(-2) = 3,3$.
 TOC : racine entre -2 et 0 .
 4^e coup : $f(-1) = 0,85$.
 PLOUF : entre -2 et -1 .
 5^e coup : $f(-1,5) = 0,975$.
 TOC : la racine est comprise entre $-1,5$ et -1 .
 Et si Théo fait un nouvel essai, il va calculer :
 $f(-1,25) = (-1,25)^2 - 1,15 \times (-1,25) - 3 = 0$.
 PLOUF la racine est trouvée !

TOUJOURS PAS TERMINÉ DE COUPER LES CHEVEUX EN DEUX PROFESSEUR ?

FAUT DIRE, DE LES COUPER DANS LE SENS DE LA LONGUEUR !



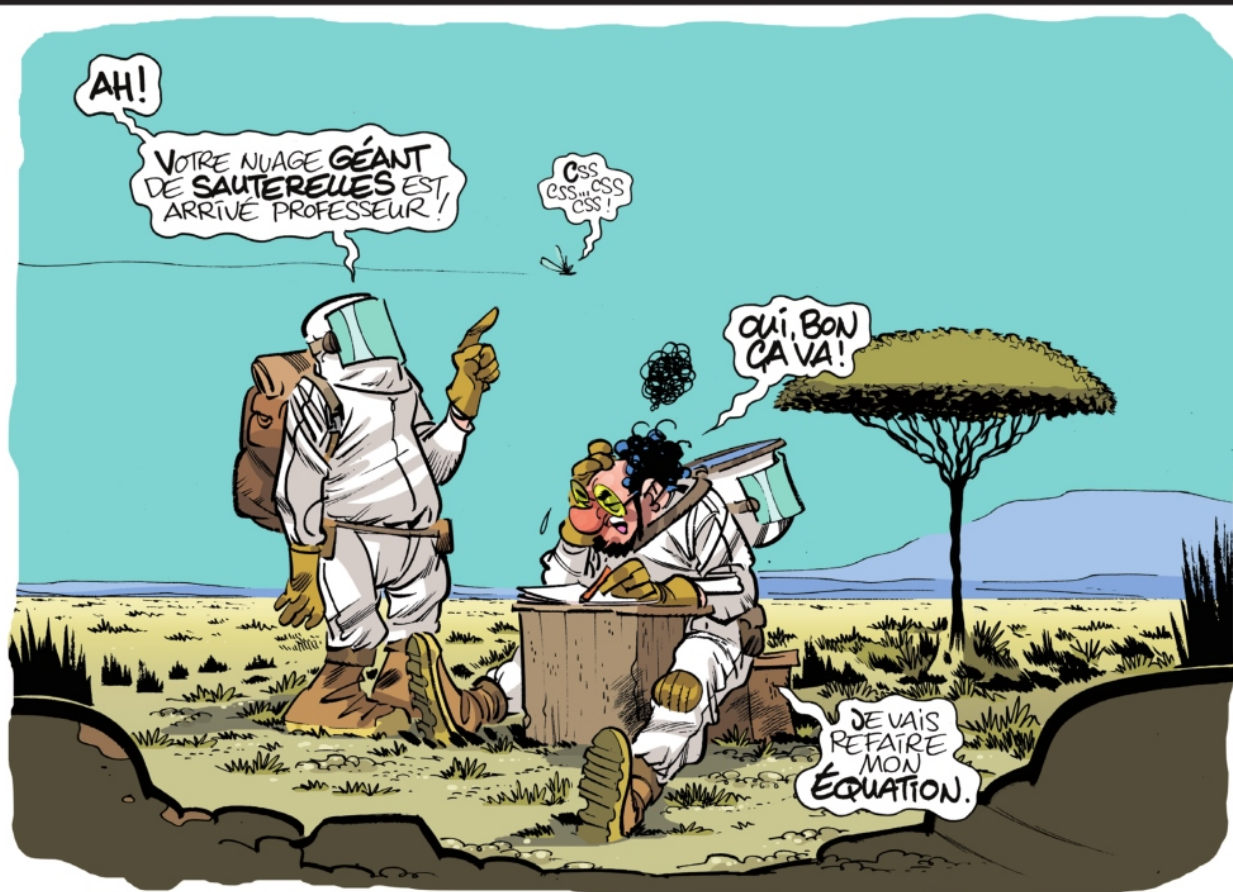


PROIES ET PRÉDATEURS : POURQUOI DE TELS ÉCARTS ?

Pourquoi, telle année, sauterelles, méduses, souris et autres pucerons se mettent-ils à pulluler ? Et pourquoi, l'année d'après, tout redevient-il paisible ? Figurez-vous que ces mystères de la nature ressemblent étrangement aux caprices d'une petite équation du second degré. En route vers le chaos.

JEAN-PIERRE BOUDINE





A frique sahélienne, en plein midi. Au loin, une ombre dans l'air et un léger crissement... Dans les champs, les paysans lèvent la tête, et réalisent soudain que la catastrophe va fondre sur eux.

Quatorze heures : le soleil est entièrement caché, il fait nuit en plein jour. Le crissement est devenu un insupportable sifflement. Les sauterelles sont là ! Un nuage géant grouillant de milliards d'insectes va tout détruire, réduire les populations à la famine. Personne n'a rien vu venir. Quelque part dans le désert australien. Le poil hérissé, affolés, les chats miaulent depuis plusieurs jours. Le fermier ne comprend pas. Trois souris passent alors dans la cour. Un misérable trio de souriceaux et pourtant l'homme blêmit. La

porte de la grange tremble, semble se gondoler puis cède sous une poussée énorme. Des millions de rongeurs se répandent partout en un instant. Le torrent gris escalade, dévale, grignote

et bientôt tout est réduit en sciure. Personne n'a rien vu venir.

Des années sans sauterelles, des années sans souris puis, brutalement, une monstrueuse pullulation. Les scientifiques ont essayé de comprendre ces caprices de

la nature. Heureusement, au siècle dernier, un mathématicien belge, Pierre-François Verhulst (1804-1849), a levé une partie du secret des populations animales. Sa découverte : une fonction mathématique très simple qui semble décrire cette alternance de calme biologique et de déchaînement. Voyons.

**Lâchez des coccinelles
dans un enclos de
pucerons bien nourris :
qui s'en tirera le mieux ?**

► Manger et mourir ◀

Donnons-nous un modèle simple. Un grand jardin peuplé de pucerons, recouvert d'une bulle de plastique façon biosphère : rien n'entre, rien ne sort. Lâchez des coccinelles friandes de pucerons dans ce milieu clos. Et observez le combat proies-prédateurs. Les coccinelles boulootent les pucerons, et, bien nourries, vont se reproduire à tire-larigot. Leur descendance fera de même. Les pucerons eux aussi se nourrissent et nous supposons, pour simplifier, que leur garde-manger est inépuisable. Ils font également des petits. Qui va s'en tirer le mieux ?

Cette situation volontairement simplifiée peut donner des résultats extraordinairement variés. Si les pucerons se reproduisent beaucoup plus vite que les coccinelles, et si l'appétit de ces dernières n'est pas trop fort, les deux populations vont croître indéfiniment. En théorie du moins, car, en réalité, la nourriture des pucerons n'est pas illimitée... Il est également possible que les coccinelles, trop gourmandes, fassent décroître la population des pucerons. Mais, du coup, moins bien nourries, elles ne se reproduisent plus autant, tout en maintenant la pression sur les pucerons. Si bien que, de diminution en diminution, les deux populations vont s'éteindre. Le comportement le plus courant est plus compliqué que cela. C'est une sorte de balancement. Les coccinelles font décroître la population des pucerons.

Comme il y a moins de nourriture, le nombre de coccinelles diminue à son tour ; comme il y a moins de prédateurs, les proies se remettent à prospérer... Il y a dorénavant davantage de pucerons, la population des coccinelles augmente de nouveau, et c'est au tour de la population des pucerons de chuter. C'est un cycle. Il peut y avoir toutes sortes de cycles, ce qui explique dans certains cas les années à méduses, à sauterelles, à souris, etc.

ZOOM

Un nombre $f(x)$ est une fonction d'un nombre x si sa valeur dépend de celle de x .
Exemple : $f(x) = 3x + 1$.
Quand $x = 2$, $f(2) = 7$.

► L'équation magique ◀

Comme annoncé, on peut étudier une partie de ces situations compliquées avec un procédé simple, puisqu'il s'agit d'une fonction (zoom) du second degré. Voici cette fonction magique :

$$f(x) = 4px(1-x),$$

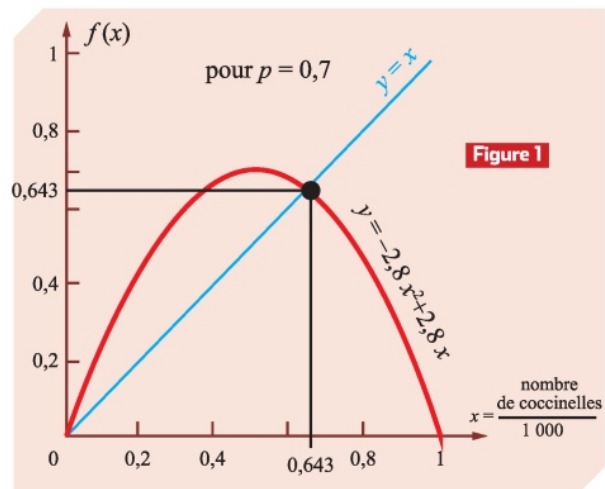
que l'on considère pour des valeurs de x comprises entre 0 et 1.

Posons que x est le nombre de coccinelles une certaine année, et $f(x)$ ce nombre l'année suivante. Comme $0 < x < 1$, le nombre de coccinelles devra, par exemple, être divisé par 1 000. Un effectif de 355 coccinelles deviendra dans ce cas : $x = 0,355$. La lettre p cache un nombre qui résume certaines circonstances, par exemple la vitesse de reproduction des prédateurs relativement aux proies. On l'appelle, dans ce contexte, un « paramètre ».

Remarquez dès maintenant que, si x augmente, $(1-x)$ diminue. Par conséquent, le résultat de la multiplication deviendra plus grand... ou plus petit, selon les cas. Ce sont ces cas que nous allons scruter.

► À vos calculatrices ◀

Fixons pour commencer $p = 0,7$. La fonction $f(x)$ est alors égale à $2,8x(1-x)$ ou, après développement $f(x) = -2,8x^2 + 2,8x$. Traçons-la pour $0 < x < 1$. Une parabole s'affiche, tout à fait ordinaire.



Maintenant, vous pouvez entrer dans la danse, si vous le souhaitez, armé d'une calculatrice ou d'un ordinateur. Posons comme première valeur de x , le nombre 0,3 (= 300 coccinelles). En calculant $f(0,3)$ on trouve :

$$f(0,3) = 2,8 \times 0,3(1 - 0,3) = 0,588.$$

La population de coccinelles, qui était de 300 une année, devient donc 588 l'année suivante. Pour connaître le destin de la tribu, il faut maintenant calculer $f(0,588)$, qui vaut 0,678. Puis $f(0,678)$, qui donne 0,610, etc. Vers le vingt-cinquième coup environ, on obtient une stabilisation à 0,643. Ce procédé répétitif porte un

» nom : l'itération. Un phénomène se déroule à partir d'une donnée et produit un résultat ; ce résultat devient la nouvelle donnée de départ, on le passe à la moulinette de la fonction et ainsi de suite.

Pour connaître le destin des coccinelles, rien ne vaut une belle itération.

Revenons au dessin ci-dessus. La droite qui le balafre est l'ensemble des points dont l'ordonnée est égale à l'abscisse, comme (0,2 ; 0,2), (0,5 ; 0,5), etc. Son équation n'est autre que $y = x$. Que se cache-t-il aux points d'intersection des deux courbes $y = x$ et $y = 2,8x(1 - x)$, c'est-à-dire de la droite et de la parabole ? Pas difficile : ces points sont les solutions d'une équation réunissant les deux membres de droite.

$$\begin{aligned} \text{On pose donc :} \\ 2,8x(1 - x) = x. \end{aligned}$$

» L'étrange attracteur ◀

Développez $2,8x(1 - x) = x$.

Il vient $2,8x^2 - 1,8x = 0$. On trouve deux racines :

$$x' = 0 \text{ et } x'' = \frac{9}{14},$$

dont une valeur approchée est... 0,643. Tiens tiens, une connaissance ! Eurêka ! On comprend pourquoi les points

communs à la parabole et à la droite $y = x$ sont importants : ils sont fixes. Pour ces deux valeurs de x , la « sortie » vaut l'« entrée ». Lorsque vous proposez à la fonction $f(x) = 2,8x(1 - x)$, les valeurs

$$x = 0 \text{ ou } \frac{9}{14},$$

elle vous retourne tout bonnement la valeur que vous avez entrée (puisque là, $y = x$). À ces points remarquables, l'itération tourne court, plus rien ne bouge : coccinelles et pucerons ont des effectifs constants d'une année sur l'autre.

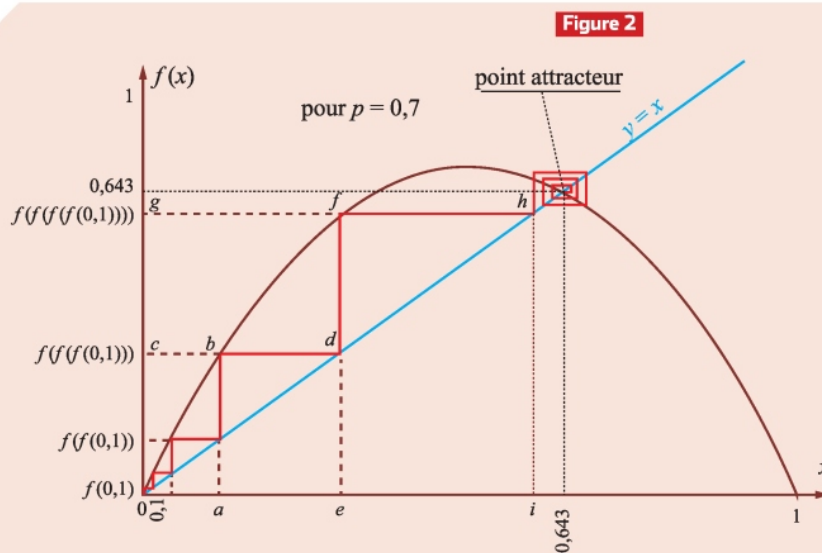
Il y a plus étrange. En partant de n'importe quelle valeur initiale de x (comprise entre 0 et 1), on est irrésistiblement attiré par :

$$\frac{9}{14}.$$

Ce n'est pas un bête point fixe, c'est un point fixe ATTRACTIF. Le point $x = y = 0$ est également un point fixe, mais les valeurs s'en éloignent : lui est répulsif.

Comment se fait-il qu'il y ait des points fixes attractifs (dits « attracteurs ») et d'autres répulsifs ?

Foin de démonstration, vous pouvez « sentir » la chose à l'aide d'une calculatrice. Si vous multipliez constamment par lui-même le nombre 1,01, vous verrez le résultat augmenter lentement, puis



Le trajet en escalier illustre la mécanique de l'itération. Pour les valeurs proches de 0, « l'escalier » est trop petit, on n'y voit goutte. Prenons donc le train en marche, un peu plus loin dans l'itération, par exemple quand la valeur de x correspond au point repéré par la lettre « a » (entrée) et qu'il faut trouver $f(a)$ (la sortie). Pour cela on passe de « a » au point b sur la courbe puis au point c qui correspond à $f(a)$. Cette dernière valeur sert « d'entrée » à une nouvelle itération ; il faut la rapporter sur l'axe des x , ce qui est un jeu d'enfant si on utilise la droite $y=x$. Suivez le guide : de c, on passe à d, puis à e. Et on recommence, passant ainsi par f, g, h et i. Ici la machine se détache car notre parabole a cessé de monter pour se mettre à descendre et le même principe nous fait converger vers le point attracteur.

s'emballer, devenir gigantesque et s'envoler vers l'infini. La manip est simple : saisissez $(1,01)^{10}$, $(1,01)^{100}$, etc. Si vous faites la même chose avec le nombre 0,99, vous allez chuter vers... zéro ! Dans le premier cas, les valeurs s'échappent ; dans le second cas, elles se concentrent. Pourtant, 1,01 et 0,99 sont vraiment très voisins ! Vérifiez, c'est étonnant.

Résumons : pour $p = 0,7$ on a un point attracteur. Pucerons et coccinelles sont en phase stable au bout d'un certain temps. Pour une plus petite valeur de p , 0,2 par exemple, le point $x = 0$ devient attractif : coccinelles et pucerons disparaissent...



> La bosse du chameau <

Que se passe-t-il si l'on fait croître p au-delà de 0,7 ? Par exemple pour $p = 0,8$, on a :

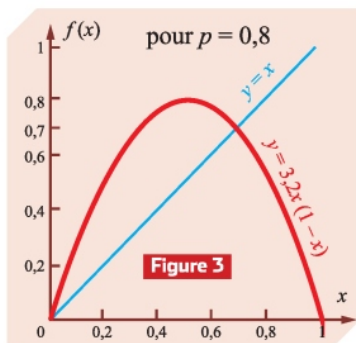
$$f(x) = 3,2x(1-x).$$

Si nous démarrons l'itération avec 300 coccinelles, on aura :

$$f(0,3) = 0,672.$$

Puis en appliquant f à cette valeur, il vient successivement 0,705 ; 0,665 ; 0,712 ; 0,655.

Attention : si vous taquinaez la calculatrice, surtout, réintroduisez toutes les décimales proposées par la machine. Au bout d'une quinzaine d'opérations, vous obtenez alternativement deux valeurs qui ne bougent presque plus, l'une à 0,799 et l'autre à 0,513.



C'est ce qu'on appelle un 2-cycle attractif. L'effectif des bestioles oscille entre deux valeurs fixes, quelle que soit la valeur initiale, à deux exceptions près. Cela pourrait signifier que, les années paires, il y aurait « beaucoup » de coccinelles et que, les années impaires, il y en aurait « peu ». On a beau regarder le graphe de la parabole (juste un peu plus pointue que la précédente, figure 3), on ne distingue aucune situation particulière pour ces deux valeurs 0,513 et 0,799.

En revanche, comme ce graphe coupe toujours la droite $y = x$ en deux points, on peut être certain que si vous donnez à x l'une de ces deux valeurs, rien ne bougera d'une année à l'autre. Ce sont les deux exceptions signalées plus haut.

Seulement, cette fois, ces points fixes ne sont pas attractifs. Résultat : si vous prenez une valeur ne serait-ce que légèrement différente (et, sauf pour 0, c'est inévitablement ce qui va se produire), les valeurs s'éloigneront, et tomberont dans le 2-cycle. Y a-t-il une explication mathématique à cela ?

» Oui. Pour la comprendre, il faut sauter une année sur deux. Autrement dit, regarder ce que donne la population non pas un mais deux ans après.

» La double bosse <

Si x est la population de coccinelles une certaine année, la population de l'année suivante sera :

$$y = f(x) = 3,2x(1-x).$$

Et celle de l'année d'après ? Ce sera $f(y)$. Si l'on veut calculer $f(y)$ il faut donc, dans $f(x)$, remplacer x par y , c'est-à-dire par $3,2x(1-x)$. Facile à condition de ne pas s'effrayer d'une écriture un peu compliquée. Écrivons :

$$f(y) = f(f(x)) = 3,2 [3,2x(1-x)] (1 - [3,2x(1-x)]).$$

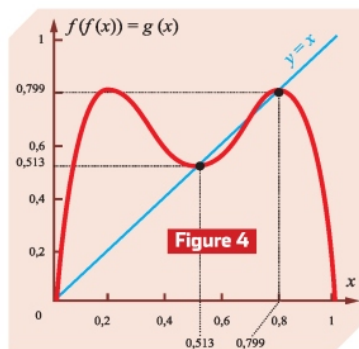
Les crochets servent simplement à bien voir qu'on a partout remplacé x par $3,2x(1-x)$.

Qu'est-ce que cette fonction de x ? Tout bêtement un polynôme. Si vous le développez (ce n'est pas indispensable), vous verrez qu'il est de degré quatre (donc du genre $x^4...$).

Un logiciel graphique nous évitera une étude barbant. Affichons le profil de la chose (voir figure 4).

Le voici, avec la fameuse droite $y = x$. La double bosse est la fonction qui, selon la population de l'année N , donne celle de l'année $N + 2$. Nous la noterons g .

Il y a quatre points communs entre la courbe bosselée de g et la droite, donc quatre points fixes. On peut deviner qu'il y a deux points fixes répulsifs (0 et un autre) et deux points fixes attractifs, dont les valeurs sont celles du 2-cycle de f , à savoir 0,513 et 0,799. Que penser ? Si, pour une certaine valeur de x , $f(x) = x$, c'est que la population ne bouge pas d'une année sur l'autre. Dans ce cas, elle n'a toujours pas bougé au bout de deux ans. Mais le contraire n'est pas vrai ! Que la population de l'année $N + 2$ soit la même que celle de l'année N n'implique pas que celle de l'année $N + 1$ soit encore égale. Cela peut signifier, justement, un balancement, ou comme disent les mathématiciens, un 2-cycle.



LE NOMBRE DE FEIGENBAUM

Vous pourriez faire la même étude avec une autre fonction que $f(x) = 4px(1-x)$. Du moment qu'elle a une forme de bosse arrondie, c'est bon. Par exemple une fonction sinus, avec un paramètre p , du genre : $g(x) = p \sin \pi x$, x et p entre 0 et 1. Vous trouveriez le même phénomène : cascade de bifurcations puis chaos. Même numériquement, on verrait des similitudes. Par exemple, les valeurs frontières de p ont une propriété étonnante. Elles sont de plus en plus serrées et la longueur de l'intervalle qui les sépare est divisée, quand on avance, par 4,669201... Plus précisément, le facteur de réduction des intervalles est de plus en plus proche de ce nombre. Si vous prenez une autre fonction, totalement différente (mais ayant une forme de bosse arrondie), vous retrouverez la même propriété des valeurs frontières, avec ce même nombre 4,669201 (les décimales suivantes sont : 609 102...). On appelle cette drôle de valeur le nombre de Feigenbaum, du nom d'un physicien américain l'ayant étudié. Le nombre de Feigenbaum se trouve être en ce sens une constante universelle.

Nous avons vu qu'après un certain nombre d'itérations, les valeurs des populations sont, à un poil près, successivement d'année en année : 0,799 ; 0,513 ; 0,799 ; 0,513 ; 0,799 ; 0,513... Regardez seulement une année sur deux. Vous avez, disons, les années de millésime impair (0,799 ; 0,799 ; 0,799 ; etc.), c'est-à-dire un premier point fixe. Et les années paires (0,513 ; 0,513 ; 0,513 ; etc.), un second point fixe. Les années à pucerons (ou à sauterelles, etc.), dans cet exemple, sont celles qui enregistrent une population importante, c'est-à-dire les années impaires. Mais la nature présente des situations encore plus compliquées...

» Montagnes russes <

Expérimentons une troisième valeur, $p = 0,875$, c'est-à-dire :

$$f(x) = 3,5x(1-x).$$

Observons le niveau de la population des coccinelles avec 0,4 (= 400 coccinelles) comme point de départ. Et itérons allègrement. Voici les seize premières valeurs, avec trois décimales lues sur la machine :

0,4 ; 0,84 ; 0,47 ; 0,871 ; 0,39 ; 0,833 ; 0,486 ; 0,874 ; 0,384 ; 0,828 ; 0,497 ; 0,874 ; 0,382 ; 0,826 ; 0,500 ; 0,874.

Si vous continuez, les trois premières décimales ne bougent plus. Comme les fois précédentes, vous pouvez vérifier que le comportement est le même quand on part d'une autre valeur : 0,9 (= 900 coccinelles) ou 0,2 (= 200 coccinelles). Cela s'appelle un 4-cycle attractif. Tous les 4 ans, coccinelles et pucerons repasseraient donc par un même niveau de population.

Pour l'expliquer, considérons la fonction qui va de la population d'une année donnée à celle de QUATRE années après, soit $f(f(f(f(x))))$. Ce qui fait un polynôme de degré seize (à calculer seulement si vous faites de l'insomnie), et une courbe à 8 bosses qui rencontre la droite $y = x$ en un certain nombre de points fixes. QUATRE de ces points sont des attracteurs. À continuer ainsi, l'exposé deviendrait fastidieux. Sautons plutôt à une description plus globale du phénomène.

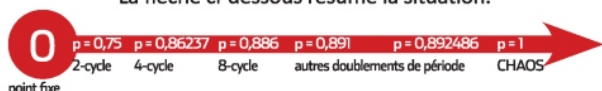
» Disparition des limites <

Prenons de l'altitude. Au fond, le destin de nos petites bêtes de jardin dépend du paramètre p . Lequel possède des valeurs très spéciales (toujours entre 0 et 1, bien sûr), dites « valeurs frontières ». Entre ces valeurs, la suite des itérées se comporte de façons diverses. Ne parlons que des points ou cycles « attractifs ». Dans les pages précédentes, nous avons d'abord rencontré un point attracteur, puis un 2-cycle avec 2 points attracteurs, un 4-cycle avec 4 points attracteurs, etc. Les mathématiciens ont



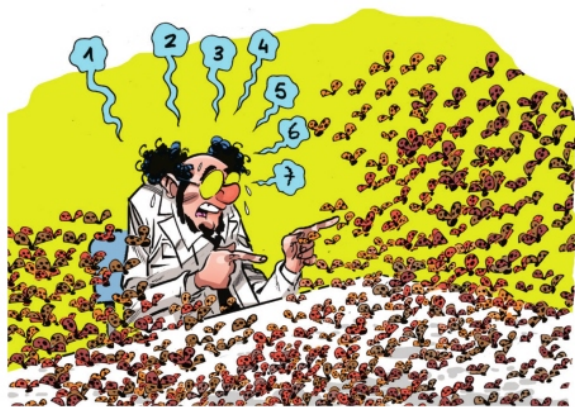
» baptisé cette ramification la « cascade de bifurcations ». Encore plus étrange, et même carrément perturbant, au-delà d'une certaine valeur de p , la suite des itérées semble devenir anarchique, chaotique.

La flèche ci-dessous résume la situation.



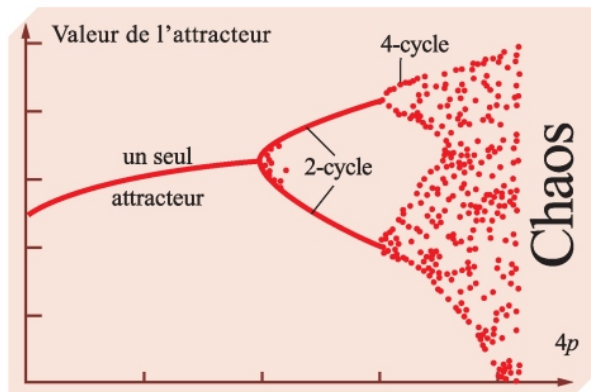
Sur ce « chaos », il y aurait beaucoup à dire : c'est un secteur des maths (et de la physique) en pleine santé. Par exemple, quelle est la différence entre un ordre très compliqué et pas d'ordre du tout ? En d'autres termes, comment sait-on qu'une suite anarchique de nombres ne va pas revenir telle quelle au bout d'un certain temps ? Auquel cas il existerait un ordre caché dans cette suite. Difficile de répondre. Imaginez que vous ayez un cycle de longueur 1 024. Il faudra environ 10 000 itérations pour que vous remarquiez qu'elles viennent se coller sur les mêmes 1 024 valeurs ! Longuet et pas simple !

La situation est encore plus compliquée dans la zone chaotique. Vous pouvez avoir des cycles très longs et, tout à coup, un cycle de longueur 3 (un 3-cycle). Par exemple pour $p = 0,957968512$, les valeurs sont attirées par le 3-cycle 0,5 ; 0,957 ; 0,154. Pour certaines valeurs de p , on sait démontrer qu'il n'y a pas de cycle du tout et que les valeurs des itérées remplissent équitablement l'intervalle de tous les nombres entre 0 et 1. Bref, les populations de pucerons et de coccinelles varient chaque année, sans régularité aucune, avec des pullulations brutales suivies d'effondrements. En d'autres termes, dès que p aborde la zone chaotique, il devient impossible de prévoir ce qui va se passer.



> La fleur couchée <

Le dessin suivant, que vous pouvez obtenir sur votre ordinateur avec un logiciel de calcul, est une vedette des mathématiques du chaos. Cette drôle de fleur horizontale montre la même chose que la flèche ci-contre, en plus joli et plus parlant. En abscisse, vous avez $4p$. En ordonnée, la valeur des points attracteurs à



partir du moment où la situation, si elle doit se stabiliser, se stabilise. Vous demandez à l'ordinateur de calculer les 60 premières itérées, et de représenter seulement la ou les valeurs obtenues à partir du rang 30.

La « tige », à gauche, est la zone où il y a un attracteur et un seul. À partir du rang 30, les itérées sont toutes collées sur un point.

**Le chaos est un secteur
des mathématiques
qui est en pleine santé.**

Un peu plus loin, la tige se divise : les itérées se collent sur un 2-cycle. Puis, chaque branche du 2-cycle se dédouble,

etc. À partir d'une certaine valeur de p , les itérées remplissent toute la verticale, c'est le « chaos ».

Pourquoi ? Parce que, pour étudier la nature, les mathématiciens la simplifient : c'est la démarche même de la science. Quand ils simplifient beaucoup, l'évolution est linéaire, l'avenir est tracé tout droit, on peut prévoir. Quand ils simplifient un peu moins (pour avoir un modèle plus fidèle), c'est non linéaire et il arrive qu'on ne puisse plus prévoir. Et le désordre qui apparaît alors ressemble bougrement à ce qui se passe parfois dans les jardins où les coccinelles dévorent les pucerons. Tout ça avec ces bonnes vieilles équations du second degré ! Qui l'eût cru ? ■



COMMENT L'ALGÈBRE A-T-IL COMMENCÉ ?

Vous trouvez les maths austères ? Pourtant, les aventuriers de l'Arche perdue font pâle figure à côté de ceux de l'algèbre ! Les chevaliers de l'équation se sont battus pendant cinq mille ans, de l'Inde à l'Italie, via les ruelles obscures de Babylone, Alexandrie et Bagdad. Voici leur histoire.

AHMED DJEBBAR



La nuit tombe sur le fleuve Euphrate ; déjà, les premiers feux s'allument dans Babylone. Enkil, le riche caravanier, agonise. Ses trois fils l'entourent, inquiets de ses dernières paroles qui vaudront testament. Le notaire affûte son stylet, une tablette d'argile fraîche sur les genoux. Dans un coin, portant des torches, les deux serviteurs Kurilil et Nabu retiennent leurs larmes. Le vieil Enkil lève une paupière sur son œil rusé et articule avec ses dernières forces : « *Je lègue à mon fidèle Nabu l'équivalent de la part de l'un de mes mauvais fils. Au brave Kurilil, je donne le tiers de ce qui reste du tiers après la part.* » Puis, ayant dit, Enkil meurt.

« *Par les ailes du démon Pazuzu, que nous reste-t-il ?* » gémissent les mauvais fils en rossant les serviteurs. Vite, on fait venir de Babylone un calculateur auquel on soumet le problème. Le spécialiste s'assied en tailleur, aligne quelques signes cunéiformes sur sa tablette, demande à être payé et livre enfin la réponse (voir encadré 1).

**C'est ainsi qu'a
commencé l'algèbre.
Très modestement.
En s'appliquant à des
affaires d'héritage.**

C'est ainsi qu'a commencé l'algèbre. Très modestement. En s'appliquant à des affaires d'héritage, de prêt à intérêt, d'arpentage des terres. Bref, à des problèmes de tous les jours où se glisse une inconnue. Pour résoudre ces problèmes pratiques, les calculateurs – c'est le nom qu'on leur donnait – ont mitonné plusieurs procédés, dont celui de la double fausse position, comme dans l'histoire du vieil Enkil. Et puis, un jour, un scribe amoureux des chiffres est tombé sur un casse-tête qu'aucune de ces ficelles ne pouvait résoudre. Exemple : « *Trouver un carré qui soit tel que, si on lui ajoute un rectangle de largeur égale au côté du carré et de longueur 10, la surface totale soit égale*

à 39. » Un petit malin imagina une solution purement géométrique (voir encadré 2). Sans le savoir, il venait de découvrir le premier procédé de résolution de ce qu'on appellera, beaucoup plus tard, une équation du second degré.

Le nom de ce héros ? Mystère ! Sur les débuts de l'algèbre, les »

1 MÉTHODE DE LA DOUBLE FAUSSE POSITION

« *Je lègue à mon fidèle Nabu l'équivalent de la part de l'un de mes mauvais fils. Au brave Kurilil, je donne le tiers de ce qui reste du tiers après la part.* »

Alors, quelle part de l'héritage revient aux trois mauvais fils ? Voici quelle était la démarche des calculateurs de Babylone, en utilisant l'écriture actuelle.

La vraie difficulté se trouve dans l'interprétation de l'énoncé. Soit m l'héritage et p la part de chacun des trois fils. Chacun des 3 fils a une part : cela fait $3p$. Le fidèle Nabu a une part égale : encore p .

Enfin le brave Kurilil a $\frac{1}{3}$ de « ce qui reste du tiers de

l'héritage moins une part » : $\frac{1}{3}(\frac{m}{3} - p)$. Le total étant égal à l'héritage m .

Voici donc l'équation à résoudre ; il s'agit de trouver p connaissant m :

$$3p + p + \frac{1}{3}(\frac{m}{3} - p) = m$$

c'est-à-dire : $4p - \frac{1}{3}p = m - \frac{m}{9}$.

Jusqu'ici nous aurions suivi le même chemin que les calculateurs de Babylone et serions bien près d'aboutir. Mais, à partir d'ici, les Babyloniens utilisent une route bien tortueuse. Ils font de $m - \frac{m}{9}$ un bloc, égal à b , et arrivent à $4p - \frac{1}{3}p = b$.

Leur méthode consiste à remplacer, dans cette formule, p , que l'on cherche, par une valeur quelconque p_1 , qui a donc toutes les chances d'être fautive (d'où le nom donné à la méthode). Après calcul, on trouve un nombre b_1 :

$$4p_1 - \frac{1}{3}p_1 = b_1.$$

On récidive : donnant à p une seconde valeur p_2 , tout aussi fautive que la précédente, on calcule b_2 :

$$4p_2 - \frac{1}{3}p_2 = b_2.$$

En possession des trois nombres b , b_1 et b_2 , on calcule les différences $b - b_1$ et $b - b_2$. On les note : $\Delta_1 = b - b_1$, et $\Delta_2 = b - b_2$, à seule fin de les introduire dans la formule magique :

$$p = \frac{p_1 \Delta_2 - p_2 \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}$$

qui donne le résultat exact.

On voit mieux sur un cas pratique. Par exemple, si l'héritage est

$m = 900\,000$ €, la part $p = 218\,182$ €.



2 PROBLÈME DU CARRÉ ET DU RECTANGLE

« Trouver un carré qui soit tel que, si on lui ajoute un rectangle de largeur égale au côté du carré et de longueur 10, la surface totale soit égale à 39. »

Les calculateurs ont dû longtemps se gratter la tête pour représenter le problème à l'aide de figures géométriques.

Une des manières possibles les a particulièrement intéressés parce qu'elle leur a donné l'idée d'un procédé de calcul qui leur évitait de refaire, à chaque fois, la figure. Un coup d'œil à celle-ci (voir ci-contre) est de mise en n'oubliant pas qu'il s'agit de résoudre une équation qu'on écrirait aujourd'hui :

$x^2 + 10x = 39$
(surface du carré : x^2 , plus surface du rectangle $10x$, le tout devant faire 39).

Le carré central, de côté x , a pour surface x^2 . Sur chacun de ses côtés on place un rectangle de largeur $10/4 = 2,5$. Chacun de ces rectangles

a pour surface $2,5x$ et à eux quatre cela fait : $10x$.

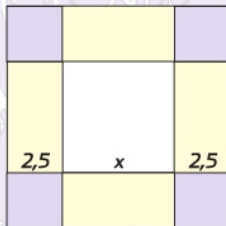
La partie claire (carré central plus les quatre rectangles jaunes) a donc pour surface $x^2 + 10x$, qui a le devoir de faire 39.

Examinons les petits carrés mauves, de côté $10/4 = 2,5$.

Chacun a pour surface $2,5^2 = 6,25$ et à eux quatre $4 \times 6,25 = 25$.

C'est ainsi que la surface du grand carré qui englobe le tout doit être égale à : (parties jaune et blanche 39) plus (partie mauve 25) = $64 = 8^2$. Le côté de ce grand carré vaut donc 8. Et comme, visiblement, il vaut aussi $2,5 + x + 2,5$, on a $x + 5 = 8$, d'où $x = 3$.

Une remarque s'impose : l'équation $x^2 + 10x - 39 = 0$ admet une seconde racine $x = -13$, mais à cette époque les nombres négatifs n'avaient pas cours, surtout pour mesurer une longueur !



» historiens font profil bas. On ne sait ni qui, ni où, ni quand. Peut-être à Babylone, peut-être en Inde, peut-être 2 000 ans avant notre ère. Ces vieilles civilisations se sont même heurtées aux problèmes du troisième degré, où l'on voit apparaître des x^3 à tire-larigot. Mais elles s'y sont cassé les dents, malgré quelques jolies ruses de Sioux (voir encadré 3).

► Diophante : le fantôme d'Alexandrie ◀

Tout cela a dû avoir lieu il y a environ quatre mille ans. Puis l'Histoire a passé, accumulant les siècles et les civilisations : Perses, Grecs, Romains ont tour à tour traîné leurs sandales autour de la Méditerranée. L'algèbre, elle, ne progressait plus guère, ou si

**Alexandrie, ville grecque
située en Égypte, était
un formidable
foyer scientifique.**

peu ; on se contentait le plus souvent d'accumuler les solutions comme autant de recettes de cuisine ; on ne démontrait jamais rien. Une exception quand même, qui est aussi un des mystères de l'histoire des sciences : le cas Diophante.

Le peu qu'on croit savoir de lui a donné prétexte à une devinette : son enfance dura $1/6$ de sa vie ; sa barbe poussa $1/12$ de sa vie plus tard ; après $1/7$ de celle-ci, il se maria ; cinq ans plus tard,

4 SOLUTION DE LA DEVINETTE

Avec x = durée de la vie, on écrit :

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right)x + 9 = x,$$

$$\text{soit } \frac{14 + 7 + 12 + 42}{84}x + 9 = x,$$

$$\text{soit } \frac{75}{84}x + 9 = x. \text{ Puis } x - \frac{75}{84}x = 9,$$

$$\text{qui donne } \frac{9}{84}x = 9 \text{ et enfin } x = 84.$$

Diophante serait alors mort à 84 ans.

il eut un fils qui vécut la moitié de la vie de son père et mourut quatre ans avant lui ; à quel âge est-il mort ?* (voir encadré 4).

D'après les spécialistes, Diophante aurait vécu et travaillé à Alexandrie entre 150 av. J.-C. et 350 apr. J.-C. Cinq siècles d'incertitude, rien que ça ! Alexandrie, bien que située en Égypte, était une ville grecque, la lumière du monde antique, un formidable foyer scientifique. Quelque chose comme Oxford, Paris et Harvard réunis. Diophante ne pouvait pas trouver mieux pour exprimer son talent.

* Anecdote tirée d'un ouvrage que nous vous conseillons : *Des mathématiciens de A à Z*, par Bertrand Hauchecorne et Daniel Suratteau, éditions Ellipses.

3 LES NOMBRES DANS LA CAVE

Voici un problème trouvé sur une tablette babylonienne :

« Soit une cave dont la profondeur est égale à douze fois son flanc. J'ai extrait la terre. J'ai additionné mon sol et la terre et c'est $1 + 1/6$. Le front est les deux tiers du flanc. Que sont le flanc et le front ? »

On commence par choisir un symbole pour chaque grandeur : x pour le flanc (longueur), y pour le front (largeur) et z pour la profondeur. Le mot « sol » signifie « surface » (au sol) et le mot « terre » est mis pour « volume ».

Le « sol » = xy et la « terre » = xyz

dont la somme est égale à $1 + \frac{1}{6}$:

$$xy + xyz = 1 + \frac{1}{6}.$$

On sait en plus que « la profondeur est douze fois le flanc » : $z = 12x$ et que « le front est les deux tiers du flanc » :

$y = \left(\frac{2}{3}\right)x$. On remplace donc y par $\left(\frac{2}{3}\right)x$ et z par $12x$:

$$x\left(\frac{2}{3}\right)x + x\left(\frac{2}{3}\right)x \times 12x = 1 + \frac{1}{6}.$$

$$\text{D'où : } \frac{2}{3}x^2 + 8x^3 = 1 + \frac{1}{6} \text{ et } 8x^3 + \frac{2}{3}x^2 = \frac{7}{6}.$$

$$\text{Puis, en multipliant par 216 : } 1728x^3 + 144x^2 = 252, \text{ soit : } 12^3x^3 + 12^2x^2 = 252.$$

Ici la situation semble coincée. Les Babyloniens, au hasard des problèmes et des calculs, avaient constitué des tables numériques : sommes de nombres, sommes de carrés et sommes de cubes, sommes de carrés et de cubes.

Il leur suffisait de chercher dans ces tables un nombre $12x$ dont le carré plus le cube = 252. Ce nombre est 6.

$$\text{Dès lors, } 12x = 6 \text{ donne } x = \frac{1}{2} \text{ et } y = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

De Diophante, on n'a retrouvé que des fragments de son grand œuvre, le *Livre des Arithmétiques*. Il y traite de diverses formes d'équations, du premier, du second et même du troisième degré. Il est, semble-t-il, le premier à avoir délaissé les figures géométriques, le premier à avoir introduit un symbolisme mathématique. Par exemple, il note σ (le sigma grec) l'inconnue que nous, nous notons x . Du coup, ses équations sont un des très rares domaines des maths antiques qui fassent encore de nos jours l'objet de recherches pointues !

» Les cavaliers de l'Islam <

Diophante le météore disparaît, Alexandrie la merveilleuse s'éteint, les conquérants passent et repassent. Et puis les Arabes déferlent comme une tornade sous l'étendard vert de l'Islam. En quelques années, de 634 à 711, ils bâtissent un immense empire qui s'étend de l'Inde aux Pyrénées. Au début, leurs nouveaux sujets se moquent d'eux. Pensez donc : avec leurs chameaux, leurs sabres courbes et leurs mœurs brutales de nomades, ils n'ont rien pour impressionner les intellectuels raffinés d'Égypte, de Syrie et de Mésopotamie, héritiers de 4 000 ans d'histoire. Pourtant, au bout d'un siècle, vers l'an 800, un « miracle » se produit. Le mariage de la conquête arabe, de la religion musulmane et des vieux peuples du Moyen-Orient engendre une civilisation nouvelle qui va briller de tous ses feux pendant quatre siècles.

Tout commence avec le déménagement de la capitale de l'empire arabe à Bagdad, une ville fondée en 762 sur le fleuve Tigre.

Initiative heureuse mijotée par une nouvelle dynastie de califes, les Abbassides. Au premier rang desquels le grand al-Ma'moun (813-833), qui n'est autre que le fils de Haroun al-Rachid, le célèbre personnage des *Mille et une nuits*. Et les maths, direz-vous ? Attendez, elles vont resurgir...

Le décor, c'est Bagdad. La ville EST le centre du monde, en gros de l'an 800 à l'an 1200. Rien ne peut lui être comparé, sauf Rome et Alexandrie de la grande époque. Une ville

énorme : un million et demi d'habitants, 10 000 rues, des milliers de bains publics, de magasins, de fabriques, de mosquées, d'écoles, de bibliothèques ! Du jamais vu. Tout circule, les hommes, les marchandises, les caravanes, les navires, l'argent, les idées. Et d'autant plus vite que les Arabes ont connu le papier bien avant l'Occident, un matériau beaucoup moins cher que le parchemin.

Philosophes, poètes, géographes, astronomes, médecins de Bagdad créent, découvrent, inventent à tour de bras. Le calife al-Ma'moun, fin lettré, leur donne des moyens. Il a de quoi : ses revenus sont cinq fois supérieurs à ceux de son rival d'alors, l'Empire chrétien de Byzance ! Il fonde une institution unique en son genre, *Bayt al-hikma*, la « Maison de la Sagesse », une sorte de mini CNRS. De là, des centaines de copistes et de traducteurs partent à la chasse aux manuscrits scientifiques grecs et indiens : une partie de la culture antique sera sauvée à Bagdad, comme la fameuse géométrie d'Euclide. Et puis, un jour, dans la « Maison de la Sagesse », un tout petit livre de mathématiques est publié...

» L'invention de l'algèbre <

Son titre déjà est une nouveauté : *Le livre abrégé du calcul par l'al-jabr et la muqabala*. C'est la première fois que le mot *al-jabr*, qui a donné notre « algèbre », appa-

raît en mathématiques. Son auteur s'appelle al-Khwarizmi (788-850), un membre de la « Maison de la Sagesse ». Les deux mots *al-jabr* et *muqabala* servaient, dans la vie quotidienne, à désigner deux ac-

tions (ou deux opérations) bien précises : *al-jabr* signifie réparation, et *muqabala*, comparaison. Par réparation, entendez « remise en place », bricolage d'une équation : on change de membre les expressions négatives pour les rendre positives. Par exemple $x^2 - 25 = 4 - 6x$ devient $x^2 + 6x = 4 + 25$.

Mais la nouveauté n'est pas là. Elle est dans l'idée suivante : al-Khwarizmi avait remarqué que tous les problèmes auxquels ses prédécesseurs avaient trouvé des solutions exactes

A Bagdad, tout circule vite : hommes, argent, marchandises, navires, caravanes et idées.

وزهرچه نه می طریق بیرون رو به

» se ramenaient en fait à six équations. Il suffisait de les étudier pour elles-mêmes et d'en donner, une fois pour toutes, la méthode de résolution. Ces équations dites « canoniques » serviront ensuite de modèles qu'on appliquera à tous les problèmes. (voir encadrés 5 et 6).

C'est du moins ce qu'ont cru les successeurs d'al-Khwarizmi en inventant des problèmes de plus en plus compliqués. L'une de ces grosses têtes, un Persan de Bagdad du nom d'al-Mahani, s'attaque ainsi à une vieille énigme de l'époque d'Archimède : comment couper une sphère par un plan de telle sorte que les volumes des deux parties soient dans un rapport donné ? Al-Mahani exprime le problème sous forme d'une équation du 3^e degré : $x^3 + c = ax^2$. Il cherche à la résoudre avec les méthodes connues. Rien n'y fait. Il décrète alors que l'équation est impossible. Or ce n'est pas la seule équation de ce type. On en connaissait exactement 14 de degré inférieur ou égal à trois et qu'on ne pouvait pas ramener aux six « canoniques » d'al-Khwarizmi. Que faire ?

Ce cuisant échec ne décourage pas les algébristes arabes. L'un d'eux, al-Khazin, a une intuition géniale : il cherche la solution du problème de la sphère dans l'intersection de deux courbes. Et il démontre que cette solution correspond à l'intersection d'un cercle et d'une hyperbole.

Mais quelle que soit la valeur de cet exploit scientifique,

5 LES ÉQUATIONS D'AL-KHWARIZMI

Voici le catalogue des 6 équations qu'al-Khwarizmi savait résoudre. Il nous paraît un peu insolite. Cela vient du fait que le zéro n'était pas considéré comme un nombre et n'était donc pas accepté au second membre.

$$\begin{array}{ll} ax^2 = c & bx = c \\ ax^2 = bx & ax^2 + c = bx \\ ax^2 + bx = c & bx + c = ax^2 \end{array}$$

(x est l'inconnue ; a, b, c , sont des nombres strictement positifs, les seuls acceptés à l'époque.)

6 RÉOLUTION PAR AL-KHWARIZMI DE L'ÉQUATION $x^2 + bx = c$ (avec b et c strictement positifs)

La démarche d'al-Khwarizmi se ramène, pour nous, au calcul du discriminant, ou plus exactement du discriminant réduit (voir article page 53) :

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac,$$

avec une équation que nous écrivons $x^2 + bx - c = 0$.

Le calcul donne : $\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$.

D'où LA solution d'al-Khwarizmi : $x = \sqrt{\Delta'} - \frac{b}{2}$.

La solution négative est ignorée : les savants arabes ne peuvent pas y penser, elle n'a pas de sens pour eux. Alors qu'aujourd'hui on aurait :

$$x = \pm \sqrt{\Delta'} - \frac{b}{2}.$$

ce n'était pas vraiment de l'algèbre car al-Khazin utilisait la géométrie, notamment les intersections de coniques.

» Omar Khayyam, le poète des maths <

Quelles sont donc les formules permettant de résoudre les yeux fermés une équation du troisième degré ? Tous les mathématiciens de Grèce, de l'Inde et du monde arabe se sont en vain posé la question. C'est alors qu'apparaît en Perse un personnage mystérieux et fascinant. Abou I-Fath Omar ibn Ibrahim al-Khayyam est né à Nishapur, vers 1048. Sa vie, il la passe en grande partie à Samarcande et Merv, villes-joyaux situées aux confins de l'Asie centrale. Mathématiques, philosophie, médecine, astronomie, ce bel esprit excelle en tout. L'Europe le connaît surtout aujourd'hui par ses magnifiques poèmes (les quatrains du *Rubaiyat*), où il célèbre le vin, le vent, la vie, le passage du temps. Un esprit si libre et si audacieux que certains religieux »

وزهرچه نه می طریق بیرون رو به



وز هر چه نه می طریق بیرون رو به

**« O toi qui es venu tout ardent du monde de
l'esprit ; Toi qui, stupéfait, t'interroges
sur le cinq, le quatre, le six et le sept ;
Bois du vin, car tu ne sais pas d'où tu es
venu. Réjouis-toi car tu ne sais où tu vas. »**

Omar Khayyam

lui cherchèrent des noises. Pour faire taire les soupçons, il se serait même, dit un de ses biographes, résolu à faire le pèlerinage à La Mecque.

À la fin de ses jours, il retourne dans sa ville natale, Nishapur. Laissons la parole à l'historien al-Arudi qui l'a connu. « J'ai entendu Omar dire : "Lorsque je mourrai, ma tombe sera dans un lieu sur lequel soufflera la brise du nord et s'amoncelleront les fleurs et les roses". Je fus étonné de son propos car j'étais convaincu qu'al-Khayyam ne parlait qu'en connaissance de cause. Et, en 530 de l'Hégire [1135-36], j'ai appris que la terre avait, depuis quatre ans, enseveli cet homme immense, laissant orphelin le monde ici-bas. Comme il avait sur moi le droit du professeur, je suis allé visiter sa tombe, un vendredi, accompagné d'un homme pour m'indiquer [l'emplacement de] sa tombe. Il m'emmena au sanctuaire de Hira ; je me tournai vers la gauche et je vis la tombe de Omar al-Khayyam à proximité du mur d'un jardin abandonné. Autour de la tombe avaient poussé des abricotiers qui étaient en fleur et les fleurs s'étaient amoncelées sur sa tombe jusqu'à la recouvrir. Je me suis alors souvenu de ce qu'il avait dit (...) et je me suis mis à pleurer. »¹

Revenons aux maths où Khayyam eut un coup de génie. Pas de formules pour les équations du troisième degré ? Qu'à cela ne

tienne ! Le Persan essaya d'une manière graphique, par intersection de courbes. Voici comment.

Prenez l'équation $x^3 - 2x - 3 = 0$.

Vous pouvez la transformer en $x^3 - 2x = 3$, puis en :

$$x(x^2 - 2) = 3.$$

Et enfin en :

$$x^2 - 2 = \frac{3}{x}.$$

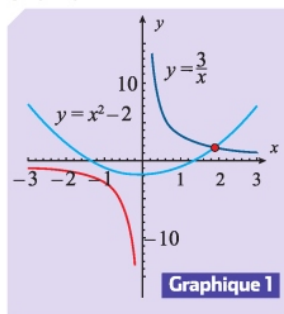
Regardez le membre de gauche et posez $y = x^2 - 2$. C'est l'équation d'une parabole. Regardez le membre de droite et posez :

$$y = \frac{3}{x}.$$

C'est l'équation d'une hyperbole.

La découverte géniale de Khayyam est exactement ici : **l'équation de départ n'est autre que celle qui donne l'abscisse du point d'intersection de cette parabole et de cette hyperbole.**

Si vous savez tracer avec précision ces courbes, en lisant sur le graphique 1 ci-dessous les coordonnées de l'intersection, vous aurez la solution cherchée.



Même sans précision, vous pourrez, en général, savoir facilement combien il existe de racines et leur valeur grossière. Dans cet exemple il est clair, même avec un graphique gribouillé, qu'il y a une seule racine et qu'elle est proche de 2.

»»

¹ Cité par SARRAF, A.H. : *al-Muqārana bayna al-Macarrī wa al-Khayyām* [Comparaison entre al-Macarrī et al-Khayyām].

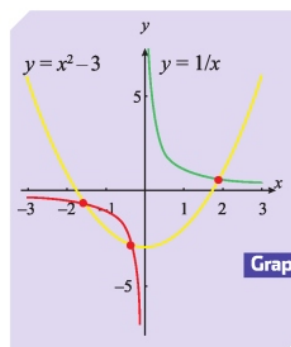
وز هر چه نه می طریق بیرون رو به





وز هرچه نه می طریق بیرون رو به

»»



Graphique 2

De même, on voit tout de suite que l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ (qui se ramène à considérer la parabole $y = x^2 - 3$ et l'hyperbole $y = 1/x$) a trois racines ; l'une est positive et les deux autres négatives (graphique 2).

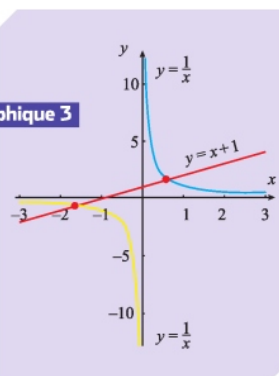
C'est très utile car, souvent, on n'a besoin que de renseignements assez grossiers sur les racines : connaître leur nombre et savoir les situer. Quand on sait « à peu près » où elles sont, il est en général assez facile de les connaître avec précision, par dichotomie par exemple (voir article page 15).

Notez bien que cette méthode pouvait également servir à résoudre des équations du second degré.

Par exemple $x^2 + x - 1 = 0$, devient $x(x + 1) = 1$ et $x + 1 = \frac{1}{x}$.

Soit (graphique 3) l'intersection de la droite $y = x + 1$ avec l'hyperbole :

$$y = \frac{1}{x}$$



Graphique 3

On peut même résoudre ainsi l'équation générale

$ax^2 + bx + c = 0$ (sauf si $c = 0$) par intersection d'une droite variable avec l'unique hyperbole $y = \frac{1}{x}$, après avoir divisé tous les coefficients par $(-c)$, ce qui ne change pas les éventuelles racines.

»»

V64€
S'IL VOUS
PLAÎT.

وز هر چه نه می طریق بیرون رو به

» Magré tout le génie de Khayyam, le suspense restait entier : pouvait-on, oui ou non, trouver une méthode semblable à celle d'al-Khwarizmi, et qui permette d'exprimer les solutions d'une équation du 3^e degré ? La réponse attendra longtemps. Elle ne viendra pas de Bagdad la lumineuse, détruite en 1258 par les hordes mongoles. Elle viendra d'un nouveau « miracle » historique, européen celui-là.

» Italie : la renaissance des maths <

Le décor change. Nous sommes au XV^e siècle en Italie. On retrouve les mêmes ingrédients qu'à Bagdad : des villes grouillantes d'activités commerciales, des idées qui circulent librement, des groupes de savants protégés par le pouvoir, la traduction des œuvres scientifiques d'autres civilisations, de la Grèce antique et du monde arabe surtout... Cette Italie brillantissime de la Renaissance, la ville de Bologne en tête, va donner un coup de fouet à l'algèbre, comme Alexandrie et Bagdad avant elle.

Scipione del Ferro (1465-1526) fournit, pour la première fois dans toute l'histoire des mathématiques, la solution positive d'une équation du 3^e degré (voir encadré 7). Hélas, il emporte sa méthode dans la tombe. Quelques décennies plus tard, un autre algébriste, Niccolo Fontana, dit Tartaglia (le Bègue en italien), résout plusieurs équations de ce type. Ce pauvre Tartaglia eut une vie de chien. À 13 ans, pour échapper à la soldatesque française qui entre dans la ville de Brescia, il se réfugie dans la cathédrale avec sa famille. Peine perdue : les soudards massacrent son père sous ses yeux et lui assènent un coup d'épée qui lui brise le crâne et lui fend le palais en deux. D'où un bégaiement à vie. Le gamin est retrouvé à demi-mort par sa mère. N'ayant rien pour le soigner, la *mamma* se résout à lécher ses plaies. Il guérit.

7 RÉSOLUTION PAR DEL FERRO DE L'ÉQUATION $x^3 + bx = c$ (avec b et c strictement positifs)

Cette équation du troisième degré, simplifiée du fait qu'elle n'a pas de terme en x^2 , peut être résolue en appliquant la formule :

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^3}}$$

Il suffit de regarder cette formule pour se persuader que son intérêt est surtout théorique, car en pratique, elle sera difficile à utiliser !

Trop pauvre pour aller à l'école, Tartaglia vole les livres de maths et utilise les pierres tombales comme ardoises. Et il finit par devenir mathématicien professionnel. Il gagne son pain en affrontant d'autres savants en tournois, comme les joueurs d'échecs. Un jour, on lui donne trente équations du 3^e degré à résoudre. En une nuit, il découvre une méthode générale de

résolution et remporte le concours. À l'issue de cet exploit, un de ses collègues, Jérôme Cardan, également astrologue réputé, le per-

suade de lui confier son secret en jurant ses grands dieux de ne jamais le révéler. Mais Cardan craque et rend publique la méthode de Tartaglia.

Cette trahison a pour effet de brouiller les deux savants au point que Tartaglia faillit périr assassiné ! Elle donne surtout »

L'Italie brillantissime de la Renaissance va donner un coup de fouet à l'algèbre.

وز هر چه نه می طریق بیرون رو به

MERCI D'ACCUEILLIR,
JOSÉ QUI S'EST LANCÉ
DANS LA RÉOLUTION
D'UNE ÉQUATION DU
SECOND DEGRÉ
À L'ÂGE DE
4 ANS À PEINE!!!

BON. IL FAUT DIRE
QU'IL A MIS 89 ANS
À TROUVER LA
SOLUTION MAIS
QUAND MÊME
...

MERCI!!!



وز هرچه نه می طریق بیرون رو به

**Il a fallu 2000 ans pour résoudre
les équations des 1^{er} et 2^e degrés,
huit siècles pour celles du 3^e, et
juste quelques années pour le 4^e.**

» des idées à un autre grand Italien, Rafael Bombelli. Ce natif de Bologne (1526-1572) trouvera des solutions à toutes les équations du 3^e degré en introduisant de nouveaux nombres pour rendre possibles certains calculs intermédiaires : les nombres négatifs et les nombres imaginaires (voir article page 79).

» A l'assaut du second degré «

Dans leur lancée, les mathématiciens italiens s'attaquent à la résolution des équations du 4^e degré en appliquant les méthodes qui leur avaient si bien réussi pour celles du 3^e degré. C'est encore Bombelli qui donne les solutions.

Ce double succès excite les esprits surchauffés de l'Italie du XVI^e siècle. Et il y a de quoi : il avait fallu deux mille ans pour dégager clairement les procédés de résolution des équations du 1^{er} et du 2^e degré, puis environ huit siècles pour faire sauter l'obstacle du 3^e degré, mais à peine quelques années pour régler son compte au 4^e degré. Pareille accélération donne le vertige. Les gens de Bologne et de Padoue sont alors certains que la résolution des équations de degrés supérieurs est à portée de main. Ils se lancent donc hardiment vers le 5^e degré et au-delà. Mais en vain. Aucune solution générale ne fut trouvée pendant trois siècles.

Jusqu'à l'apparition d'un prodige norvégien, Niels Abel. Le jeune homme se mit à douter du chemin choisi par ses prédécesseurs. Et si, au lieu de s'acharner à trouver une méthode pour résoudre

l'équation générale de degré égal ou supérieur à 5, on se demandait d'abord si cette résolution est possible ? Travaillant nuit et jour malgré une tuberculose avancée, il réussit à démontrer que cette résolution n'est pas possible en général ; il existe bien des équations qui peuvent être résolues, mais d'autres non et on ne peut pas dire dans quelle catégorie se trouve celle qu'on affronte. Il meurt en 1829, à 26 ans.

Trois ans plus tard, un autre enfant prodige, Français celui-là, donnera les conditions qui permettent de dire, avant de se lancer dans la résolution d'une équation donnée, si elle est ou non résoluble. Il s'appelait Évariste Galois. Pour les beaux yeux d'une coquette, il provoque un costaud en duel. Sûr de perdre, il rédige dans la nuit et à la hâte un mémoire où il expose certaines des découvertes qui ont fondé les maths modernes. Quelques heures plus tard, il est tué comme il l'avait prévu. Il avait 20 ans.

Après lui, les équations algébriques n'eurent plus de secrets. Celles du second degré sont encore au programme de Polytechnique vers 1840. Puis elles se banalisent, entrent au lycée avec leur cohorte de techniques, comme le calcul du fameux discriminant Δ (delta). Des techniques qui, l'air de rien, ont été rodées par 5 000 ans de recherches. Alors, si d'aventure les maths vous font bailler, pensez donc à Diophante, à al-Khwarizmi, à Omar Khayyam le poète, à Tartaglia le bègue, à Cardan le parjure : vous vous sentirez moins seul... ■

وز هرچه نه می طریق بیرون رو به



ET VOUS, OU EN ÊTES-VOUS ?

Les maths sans problèmes, c'est comme le foot sans ballon : ça n'a pas de sens. Voici donc une série de problèmes à résoudre, du plus simple au plus corsé...

MICHEL DENGREVILLE et ROGER CUCULIÈRE



UN BATEAU FOU DE 89,75 kg,
DESCEND UNE RIVIÈRE DE 564 MÈTRES
À FOND LES BALLONS SUR 38,387 km
PUIS REMONTE DE 12,322 DÉCIMÈTRES,
PORTÉ PAR UN COURANT DE MALADE !!!

À QUELLE
HEURE L'ÉQUIPAGE
VA-T-IL S'ÉCRASER
LA TRONCHE ! ?

HEU...
JE SAIS
PAS !!!

$E=MC^2$???

LES PAS DURS

1 Mise en jambes

• Résoudre :

1) $3x^2 + 4x - 1 = 0$

2) $2x^2 - x + 7 = 0$

3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

• Trouver deux nombres connaissant leur somme S et leur produit P :

4) $S = 19$; $P = 78$.

5) $S = 12$; $P = 205$.

2 Aux abris, voilà m !

On donne, dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $x^2 - mx + 3m - 5 = 0$ dans laquelle x est l'inconnue et m un paramètre réel (c'est-à-dire représentant un nombre réel).

• 1) Étudier l'existence des racines.

• 2) Démontrer que les racines, quand elles existent, sont liées par une relation indépendante du paramètre m.

3 Une maison de maçon

Vous voulez construire une maison de 100 m^2 . Le promoteur vous propose immédiatement un pavillon en forme de carré de 10 m sur 10 m . Pourquoi ? Il aurait pu vous proposer un rectangle de 5 m sur 20 m : $5 \times 20 = 100$! Mais attention au périmètre de la maison : dans le premier cas il fait 40 m et dans le second 50 m ! D'où une économie de 10 m de mur ! Bon, assez d'indices comme ça. La question : de tous les rectangles de 100 m^2 de surface, quel est celui qui a le plus petit périmètre ? Et le petit coup de pouce pour la mise en équation : il s'agit de trouver deux nombres x et y tels que $xy = 100$ et $x + y$ soit minimum.

4 Le bateau ivre

Un bateau descend une rivière sur un parcours de 30 km , puis la remonte sur 12 km . Le voyage dure 4 heures . La vitesse du courant est de $2,5 \text{ km/h}$. Quelle est la vitesse propre de ce bateau ?

5 La qualité, ça se paie

Madame Jeclaue a acheté un certain nombre de pièces de tissu pour 432 euros . Si, pour la même somme, elle avait eu 2 pièces de moins, la pièce lui aurait coûté 3 euros de plus. Quel est le nombre de pièces achetées et le prix ?



6 Le nombre d'or

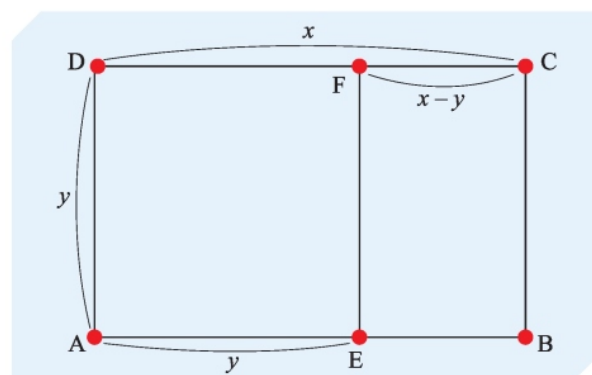
Géométriquement, le nombre d'or est défini comme le quotient :

$$\varphi = \frac{x}{y}$$

des longueurs des côtés d'un rectangle ABCD tel qu'en enlevant le carré ADFE, le rectangle EBCF reste semblable à ABCD, c'est-à-dire :

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{(x-y)}$$

(x désigne le grand côté et y le petit.)



- 1) Calculer φ .

Montrer que :

- 2) le nombre d'or est le seul nombre réel positif qui, augmenté de un, est égal à son carré ;
- 3) le nombre d'or est le seul nombre réel positif qui est égal à son inverse augmenté de un.

7 Racine sensible

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation :

$$x^2 - 3x + 5\sqrt{x^2 - 3x + 76} = 260.$$

Une astuce : poser comme inconnue auxiliaire $y = x^2 - 3x$.

8 Marketing

Une société de vente de livres par correspondance a actuellement $10\,000$ abonnés qui paient 50 euros par mois. Une étude a démontré que toute variation d'un euro du prix de l'abonnement mensuel ferait varier le nombre d'abonnés d'une centaine.

» **Attention** : une augmentation du prix fait diminuer le nombre d'abonnés et une diminution du prix le fait augmenter. Comment faut-il modifier le prix de l'abonnement mensuel pour obtenir le maximum de revenu ?

Coup de main : il faut donc écrire et résoudre l'équation du revenu R pour une variation du prix de l'abonnement de n euros (n étant un entier positif ou négatif).

9 Revoilà m !

Quelle valeur faut-il attribuer à m dans l'équation :

$$m x^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0$$

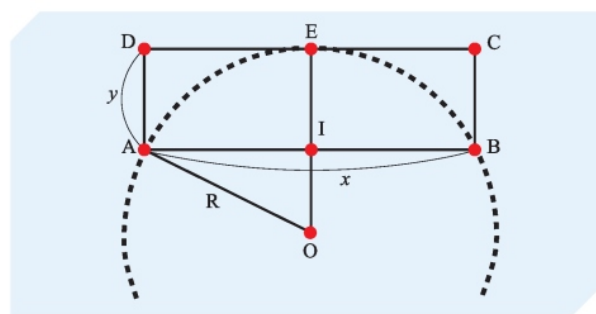
pour que :

- 1) la différence entre les racines soit 2 ?
- 2) L'une des racines soit 5 ? Dans ce cas quelle est la valeur de l'autre racine ?

DU PLUS RAIDE

10 Algèbre et géométrie

Calculer les côtés d'un rectangle ABCD, connaissant son périmètre $P = 40$ cm et le rayon $R = 10$ cm du cercle passant par les deux sommets A, B et tangent au côté CD.



11 Deux sphères en une

Une sphère métallique creuse a pour masse 72 kg. L'épaisseur de sa paroi est de 6 cm. La masse volumique est de 8 g par cm^3 .

Quels sont ses rayons internes et externes ?

Indications : la masse volumique ρ est donnée par $\rho = \frac{m}{V}$; on en tire $V = \frac{m}{\rho}$.

Attention à ne pas mélanger des grammes et des kilogrammes !

Le volume d'une sphère de rayon R est $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Utile : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

12 Les parents boivent, les enfants comptent

Un vieux problème posé au concours pour l'emploi d'élève-mécanicien de la flotte, école de Rochefort, 1898.

Un particulier fait venir trois pièces de vin : la seconde contient dix litres de plus que la troisième et la troisième cinq litres de plus que la première. Le litre de la première coûte autant de demi-centimes qu'il y a de litres dans la pièce ; le litre de la deuxième coûte cinq centimes de plus que celui de la première et le litre de la troisième coûte cinq centimes de plus que celui de la seconde. Le prix total des trois pièces est de 782 francs et 25 centimes. Combien la première pièce contient-elle de litres ?

13 Pauvres et riches

M. Fauché emprunte à M. Richard la somme de 30 000 euros à un certain taux d'intérêt. À la fin de la première année, Fauché rembourse à Richard la somme de 20 075 euros. Le taux d'intérêt de la seconde année est celui de l'année précédente majoré de 1 %. À la fin de la seconde année, Fauché rembourse à Richard la somme de 11 788 euros, éteignant ainsi sa dette. Pouvez-vous aider Fauché à retrouver ce taux d'intérêt ?

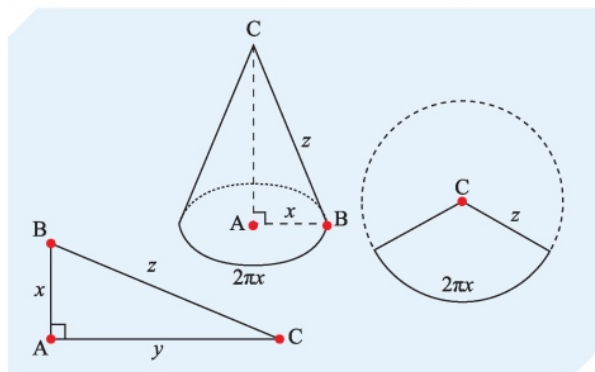
Piste : faire le bilan à la fin de la première année puis à la fin de la seconde année, ce qui donne à résoudre une équation du second degré avec, comme inconnue, le taux d'intérêt x de la première année.

14 On demande triangle d'urgence

Calculer les longueurs des côtés d'un triangle rectangle dont le périmètre est 156 cm, sachant que la somme des surfaces engendrées par l'hypoténuse, lorsqu'on fait tourner le triangle autour des côtés de l'angle droit, est de $5\,915\pi \text{ cm}^2$.

Indication : la surface latérale d'un cône, dont le rayon de la base

est x et la longueur de la génératrice est z , est égale à πxz (voir figure). On est incité à retrouver, tout en s'amusant, cette formule.



15 Jouons avec les entiers (1)

Déterminer les nombres réels a et b de façon que le polynôme $P(x) = ax^2 + bx$ vérifie la relation :

$$P(x+1) - P(x) = x.$$

Justifier : $1 + 2 + 3 + \dots + n = P(n+1) - P(1)$.

En déduire la valeur de la somme des n premiers entiers naturels.

16 Champions de Grenoble

Au tournoi de Grenoble, chaque joueur rencontre une fois, et une seule, chacun des autres participants. Après chaque match, l'arbitre donne aux deux joueurs un carton de couleur. Ce carton est rouge pour le joueur victorieux, vert pour le perdant. En cas de match nul, les deux joueurs reçoivent un carton jaune. À la fin du tournoi, on s'aperçoit qu'il a été distribué 752 cartons de chaque couleur. Combien y avait-il de participants ?

(Tiré du championnat de France des jeux mathématiques et logiques.)

17 La terre en deux pics

Deux montagnes, ayant l'une 1 200 m et l'autre 2 000 m d'altitude, sont situées dans deux îles voisines ; la distance de leurs sommets est de 36 km ; de plus, si du sommet de la plus grande on vise le sommet de la plus petite, la ligne de visée rencontre exactement la ligne d'horizon. Déduire de ces données une valeur approchée du rayon de la terre supposée sphérique.

18 Jouons avec les entiers (2)

Démontrer que le produit de quatre nombres entiers naturels consécutifs, augmenté de 1, est le carré d'un nombre entier naturel. Par exemple :

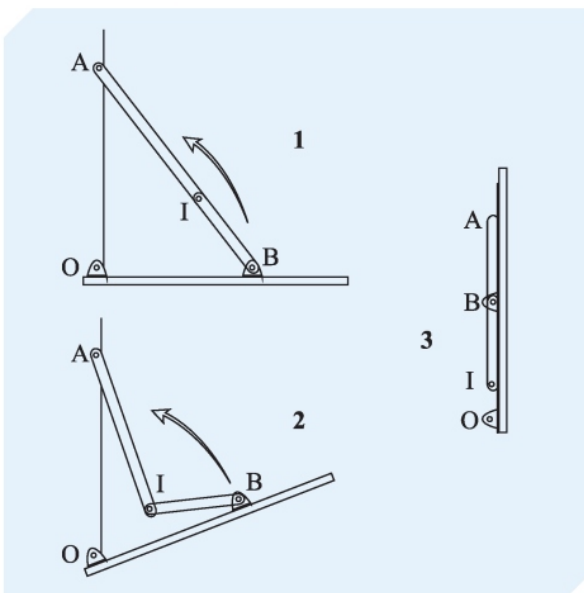
$$3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 19^2.$$

DUR, DUR

19 Max la bricole

Max veut fabriquer une table susceptible de se replier exactement à la verticale, pour avoir alors un meuble extra-plat, comme il est indiqué sur les figures 1, 2, 3. Il utilise deux tiges IA et IB articulées autour du point I. Ces deux tiges doivent être d'inégales longueurs afin que, lorsque la table est repliée (voir figure 3), le point B ne vienne pas buter contre le point A, ce qui empêcherait le meuble d'être tout à fait plat. On donne donc les longueurs $IA = a$ et $IB = b$ avec $a > b > 0$.

Trouver la position des points A et B, c'est-à-dire les longueurs OA et OB.



»



20 Jouons avec les entiers (3)

Si n est un entier, le nombre $3n^2 + 3n + 7$ peut-il être le cube d'un entier ?

21 Jouons avec les entiers (4)

Soient x, y, z réels tels que :

$$x + y + z = 3 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Quelle est la plus grande valeur possible de z et également la plus petite valeur possible de z ?

22 Jouons avec les entiers (5)

On remarque que :

$$3^2 + 4^2 = 5^2 ; 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 ; \text{etc.}$$

Pour chaque entier $n > 1$, existe-t-il un entier $a > 1$ tel que :

$$a^2 + (a+1)^2 + \dots + (a+n)^2 = (a+n+1)^2 + (a+n+2)^2 + \dots + (a+2n)^2 ?$$

23 La vérité est dans le puits

Je laisse tomber une pierre dans un puits et j'entends le « plouf » au bout de t secondes. Quelle est la profondeur du puits ?

Pour une application numérique on pourra prendre : accélération de la pesanteur : $g = 10 \text{ m/s}^2$; vitesse du son : $V = 340 \text{ m/s}$ et $t = 5 \text{ s}$.

Indications : le son se propage à vitesse constante ; le mouvement de chute est conforme à $x = \frac{1}{2}gt^2$.

24 Fonction de fonction

Soit $f(x) = 2x^2 + 7x + 2$; résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(f(x)) = x$.

25 Barres parallèles

Soient a et b deux nombres réels donnés, avec $a > 0$ et $b > 0$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + \dots \frac{b}{a}}}} = x$$

(avec n barres de fractions).

26 Aussi beau que méchant

a) On suppose : $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x \neq 0$;

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2.$$

Démontrer l'encadrement :

$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)x < |y| < x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)x + 1.$$

b) On suppose : $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, x \neq 0$;

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2.$$

Déterminer les valeurs de x et de y .

Autant vous le dire, ce problème-là est sévère : pas de panique si vous n'y arrivez pas. En tout cas, la solution, elle, est accessible.

27 Le dernier pour la SNCF

Deux mobiles sont animés chacun d'un mouvement rectiligne uniforme dans un même plan (par exemple, deux trains se déplaçant sur des voies rectilignes). À 12 h, leur distance est 1 km ; à 13 h, leur distance est 2 km ; à 14 h, leur distance est 4 km.

À quelle heure leur distance sera-t-elle minimum, et quel est ce minimum ?

Même problème pour deux véhicules spatiaux animés chacun d'un mouvement rectiligne uniforme dans l'espace, mais pas nécessairement dans un même plan. ■

Solutions page 90.



AU FOND, C'EST QUOI UNE PARABOLE?

Au hit-parade des stars, section courbes mathématiques, les deux premières marches du podium sont trustées par la droite et le cercle : les matheux les ont toujours considérés comme représentant la perfection. Mais la troisième place, sans aucun doute, revient à la parabole.

JACQUES LUBCZANSKI

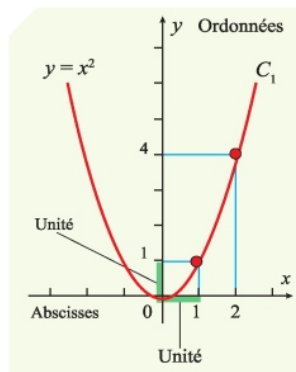


Vous êtes cinéaste, et on vous a commandé un film sur les paraboles. Drôle d'idée... Seule certitude : si le scénario est simple, il faut une vedette qui en jette. Faites votre casting puis préparez votre story-board. Plan par plan, organisez l'image – le cadre et les indications techniques pour le cameraman – et le son – le commentaire « off » du mathématicien. Moteur !



**PLAN 1
clap !**

Plan fixe sur la courbe vedette (voir figure ci-dessous). Pour le décor, traçons un repère sur une grande toile tendue : deux droites se coupent à angle droit (*ortho* en grec). Très important : on mesure sur les deux droites avec la même unité (*normé*, en grec). D'où le nom de ce type de repère « orthonormé ». La droite qui s'étire à l'horizontale, c'est l'axe des x ou axe des abscisses. L'autre droite, qui file à la verticale, c'est l'axe des y ou axe des ordonnées.



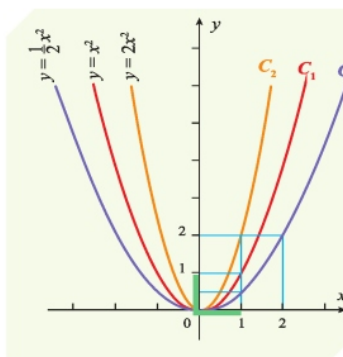
VOIX OFF

Voici une courbe que nous appellerons C_1 . Son équation est la plus simple qui soit pour une courbe du second degré $y = x^2$. En clair, les ordonnées des points de C_1 sont égales aux carrés des abscisses. Si, par exemple, $x = 2$, alors $y = 2^2 = 4$. Et nous portons sur C_1 le point de coordonnées $(2 ; 4)$.



**PLAN 2
clap !**

Plans fixes sur deux autres courbes C_2 et C_3 . En filigrane, projetez C_1 . Elles se ressemblent (voir figure ci-dessous).

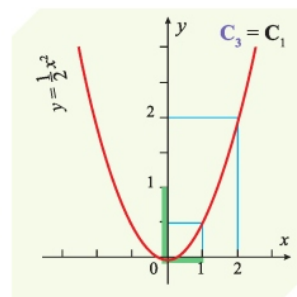
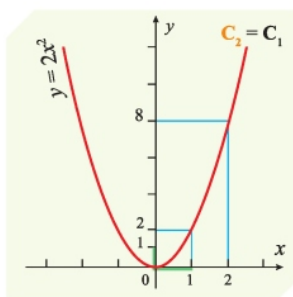


VOIX OFF

Presque aussi simples que C_1 , voici C_2 qui trace l'équation $y = 2x^2$ et C_3 qui trace l'équation

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

Cette fois les ordonnées sont les doubles, ou les moitiés des carrés des abscisses.



**PLAN 3
clap !**

Petite modif dans le décor. Supposons qu'on trace C_2 , c'est-à-dire $y = 2x^2$, dans un repère où les unités sont deux fois plus petites sur l'axe des ordonnées, tout en gardant les mêmes unités pour les abscisses : c'est la courbe C_1 qui apparaît à nouveau ! De façon analogue, si on trace C_3 , à savoir :

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

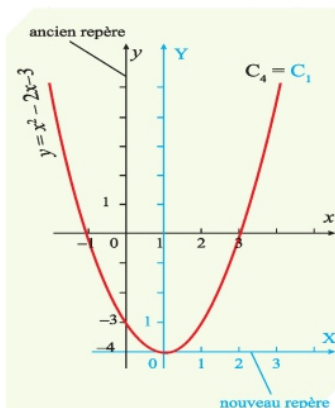
en doublant les unités des ordonnées sans toucher à celles des abscisses, c'est encore C_1 qu'on retrouve (voir les deux figures ci-dessus).

VOIX OFF

La courbe C_1 est visiblement la mère, le « modèle » de C_2 et C_3 . On peut ainsi représenter toute équation de la forme $y = ax^2$, où a est un nombre positif quelconque : c'est tout bêtement une question d'unités sur les axes.



Plan fixe sur une nouvelle courbe C_4 , représentant l'équation $y = x^2 - 2x - 3$ dans un repère orthonormé. Celle-ci semble encore être un clone de C_1 ! Coup d'œil dans le viseur de la caméra : C_4 n'est pas à la même place que C_1 dans le décor. Posons, en surimpression, le décor d'origine. Que veut dire ce décalage ?



VOIX OFF

Cette nouvelle courbe ressemble tellement à C_1 que nous allons démontrer que... c'est exactement C_1 . Le point le plus bas de la courbe tracée a pour coordonnées $(+1; -4)$. Déplaçons l'origine du repère en ce point et considérons un point dont les coordonnées étaient $(x; y)$ dans l'ancien repère. Avec la nouvelle origine, on compte les abscisses depuis la graduation $+1$. Donc toutes les abscisses sont diminuées de 1 ; de même, les ordonnées seront toutes augmentées de 4 . Autrement dit, les nouvelles coordonnées $(X; Y)$ du point seront données par $X = x - 1$ et $Y = y + 4$. Si c'est un point de la courbe tracée, on peut, dans l'équation :

$$y = x^2 - 2x - 3$$

remplacer y par $Y - 4$ et x par $X + 1$. Cela donne $Y - 4 = (X + 1)^2 - 2(X + 1) - 3$ qui, après développement, se réduit simplement à $Y = X^2$. On retrouve bien l'équation initiale de la courbe C_1 .



Collez votre œil au viseur de la caméra avec C_1 plein cadre. Effectuons un zoom avant sur la partie basse : nous voyons la courbe s'évaser progressivement, ses bras s'écartent et... C_1 devient C_3 ! Maintenant, un zoom arrière, toujours à partir de C_1 plein

cadre : notre courbe se referme comme une fleur et finit par ressembler à C_2 .



VOIX OFF

Une parabole vue de près semble plus évasée ; la même, vue de loin, semble plus refermée. Mais les prises de vue nous le disent : il s'agit exactement de la même courbe, avec trois points de vue différents !

Au bout du compte, on arrive à l'idée que la courbe C_1 peut représenter toute équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$: cela dépend des unités et de l'origine du repère utilisé. C'est précisément la définition algébrique de la parabole.



Traçons C_1 sur le sol. Nous sommes debout, à la verticale : pas de problème pour identifier notre vedette. Maintenant, faisons deux pas de côté : nous la voyons déformée par la perspective, elle penche comme roseau au vent. Et pourtant, il s'agit

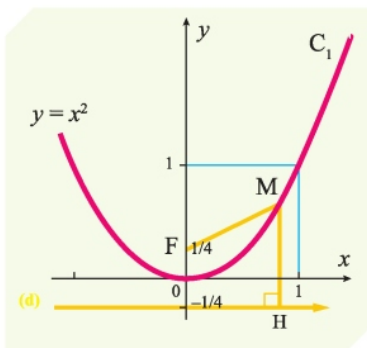
bien de notre parabole C_1 . Ce n'est pas la perception de notre cerveau qui va changer sa nature, que diable !

VOIX OFF

La parabole fait partie de la famille des courbes du second degré, qu'on appelle les « coniques ». Ses cousines – l'ellipse et l'hyperbole – n'ont pas du tout la même forme. L'ellipse est une courbe fermée, l'hyperbole est constituée de deux branches. Or, la mise en perspective ne change pas le degré des courbes : la perspective d'une conique sera encore une conique. Si on regarde une parabole simplement de côté, son allure ne change pas, on verra encore une parabole (voir article page 85).

» Coup d'œil au squelette <

Changeons de matériel. Prenons un cliché aux rayons X pour voir ce que la star a dans le ventre. Que sont ces curieuses lignes de couleur jaune ? Drôle d'oiseau que cette parabole...



VOIX OFF

Nous découvrons comment tracer la parabole point par point, à la règle et au compas (voir p. 51). Et du coup, nous allons apprendre le secret de la forme de la parabole. Pour ça, revenons à notre bonne vieille équation $y = x^2$, et traçons C_1 dans un repère orthonormé.

Considérons le point $F(0; \frac{1}{4})$,

la droite (d) d'équation $y = -\frac{1}{4}$,

un point M de C_1 de coordonnées $(x; y)$.

Si on projette M sur (d) en H, la distance MH donnera la distance de M à la droite (d), et sera égale à :

$$MH = y + \frac{1}{4}.$$

Calculons la distance MF. D'après le théorème de Pythagore, on aura :

$$MF^2 = x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$$

En développant ce calcul, et en remplaçant x^2 par y , on arrive à :

$$MF^2 = y + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = \left(y + \frac{1}{4}\right)^2$$

D'où $MF = y + \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $MF = MH$.

Ce résultat est valable pour tous les points de la parabole : il existe un point F, appelé foyer, et une droite (d) appelée directrice tels que la parabole est l'ensemble des points équidistants du foyer et de la directrice. Cette propriété est purement géométrique : elle ne dépend d'aucun repère. C'est ce qui explique la stabilité de la forme de la parabole lorsqu'on change les unités ou l'origine.

STAR AU SOMMET

En montagne, le sommet est toujours « vers le haut ». En parabole, on dit sommet aussi bien pour un « minimum » que pour un « maximum » (voir ci-dessous).



$$\text{Soit : } x_s = \frac{1}{2} \left(\frac{-b}{a} \right) = \frac{-b}{2a}.$$

Pour trouver l'ordonnée y_s il y a lieu de remplacer x par x_s dans l'équation de la parabole :

$$y_s = ax_s^2 + bx_s + c$$

$$y_s = a \left(\frac{-b}{2a} \right)^2 + b \left(\frac{-b}{2a} \right) + c.$$

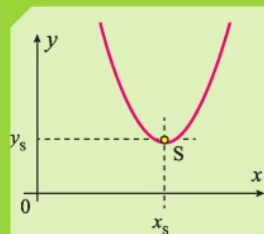
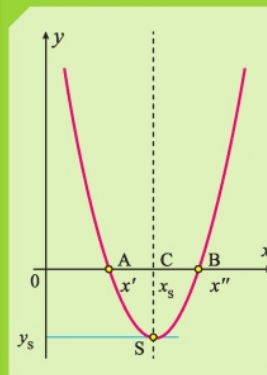
Après réduction, on arrive à :

$$y_s = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Résultat bien utile. S a pour coordonnées :

$$x_s = \frac{-b}{2a} \text{ et } y_s = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Dans tous les cas, il est souvent très utile de connaître les coordonnées du sommet S de la parabole. Sus au calcul, après un coup d'œil à la figure qui montre une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (voir ci-dessous).



Remarque : s'il n'y a pas de points A et B (voir ci-dessous), le sommet, lui, existe et ses coordonnées sont toujours données par les mêmes formules.

A et B correspondent à $y = 0$. Ils ont donc pour coordonnées respectives x' et x'' , qui ne sont autres que les racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

Le point C étant au milieu de [A, B], son abscisse qui est aussi celle du sommet S est égale à :

$$\frac{(x' + x'')}{2}$$

(la demi-somme des racines).



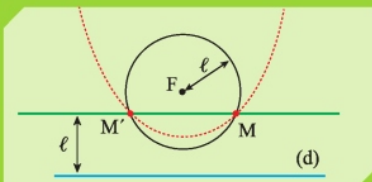
Vous ÊTES
PLUTÔT **ABSCISSE**
OU **ORDONNÉE** ?



PLUTÔT
BORDÉLIQUE.

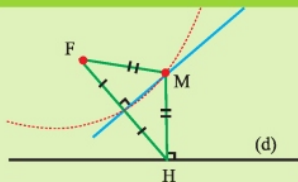


À LA RÈGLE ET AU COMPAS



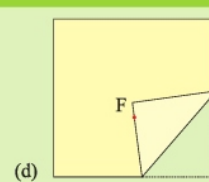
CONSTRUCTION 1

Le foyer F et la directrice (d) étant donnés, on choisit une longueur l : le cercle de centre F et de rayon l coupe la droite située à une distance l au-dessus de (d) en deux points M et M' équidistants de F et de (d) . Par définition, ils appartiennent à la parabole de foyer F et de directrice (d) .



CONSTRUCTION 2

Le foyer F et la directrice (d) étant donnés, on choisit un point H de (d) : la médiatrice (en bleu) de $[FH]$ coupe la perpendiculaire à (d) en H au point M , équidistant de F et de (d) . Même conclusion, le point M appartient à la parabole en rouge sur le dessin.



CONSTRUCTION 3

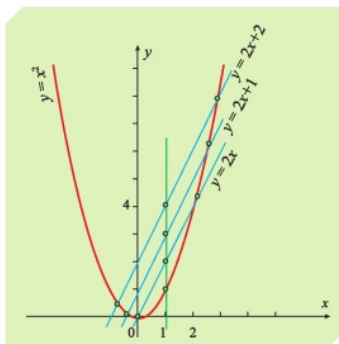
On trace un point F sur une feuille, et on plie le coin de façon à ce que le bas de la feuille, replié, passe par F ; on déplie et on recommence en pliant dans tous les sens, mais en gardant le même point F . Les plis dessinent ainsi une parabole de foyer F et de directrice (d) ...

>>>

»

» Rhabillage de la star <

Pour éviter qu'elle ne prenne froid, couvrons la parabole d'un manteau un peu particulier, à lames métalliques façon mode cybernétique.



VOIX OFF

Coupons une parabole par plusieurs droites parallèles, et construisons, pour chaque droite, le milieu des points d'intersection : tous les milieux s'alignent sur une droite, qui est parallèle à l'axe de la parabole ! Pour le prouver, plaçons-nous dans un repère où la parabole a pour équation $y = x^2$. Supposons, par exemple, que toutes les droites ont un coefficient directeur égal à 2. Cela signifie que ces droites auront pour équation $y = 2x + p$, où p est l'ordonnée à l'origine. D'une part, les coordonnées des points d'intersection doivent vérifier à la fois $y = x^2$ et $y = 2x + p$. On en tire que les abscisses sont les racines de l'équation $x^2 = 2x + p$, soit $x^2 - 2x - p = 0$. La somme des racines vaut ici :

$$-\frac{b}{a} = 2$$

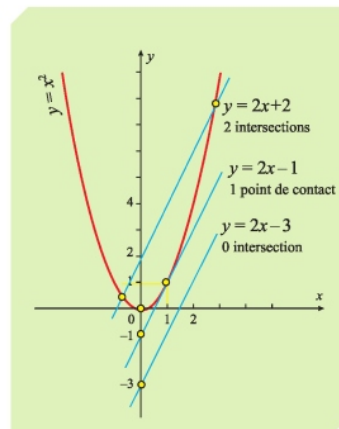
D'autre part, le milieu des points d'intersection a pour abscisse la demi-somme de leurs abscisses, c'est-à-dire 1. Le nombre p n'intervient pas dans ce résultat. Cela signifie que l'abscisse du milieu vaut 1 pour toutes les droites $y = 2x + p$. Autrement dit, tous les milieux s'alignent sur la droite d'équation $x = 1$. Nous aurions le même résultat avec un autre coefficient directeur.



» La star prend la tangente <

Rappelons-nous qu'une équation du second degré n'admet pas toujours deux racines réelles. C'est que toutes les droites d'équation $y = 2x + p$ ne coupent pas la parabole : il y en a qui passent en dessous.

Pour celles-là, l'équation correspondante n'a pas de racines réelles. Et il y en a une qui touche la parabole en un seul point : c'est une **tangente** à la parabole, de coefficient directeur 2. Mais les propriétés des tangentes à la parabole sont trop nombreuses pour vous les raconter... Ceci est un autre film. ■





DE QUELS OUTILS DISPOSE-T-ON ?

Certes, un bon ouvrier doit travailler avec méthode.
Mais il lui faut aussi une caisse à outils pour y ranger
ses instruments, trucs et tours de main destinés à lui faciliter
la tâche. Inventaire pour artisans en équations.

CHARLES DE GRANRUT et JEAN LOPEZ



► Bonnet blanc et blanc bonnet ◀

Le français se lit de gauche à droite et l'arabe de droite à gauche. L'algèbre, elle, se lit aussi bien dans un sens que dans l'autre. C'est juste un principe de lecture. Par exemple, vous tombez sur $27 - y = x$. Mais vous, vous désirez obtenir x . Faites donc une simple « lecture à l'envers » et écrivez directement $x = 27 - y$. Ça marche aussi pour les inégalités : $A < B$ donne sans calcul $B > A$.

► Possible ou impossible ? ◀

« Résoudre » une équation en x , c'est chercher la ou les valeur(s) qu'il faut donner à x pour qu'une certaine égalité soit vérifiée. On peut le dire autrement : est-il possible que cette égalité soit réalisée ? Résoudre une équation, c'est donc répondre à une question, et parfois la réponse est non.

Lorsqu'on écrit $2x + 3 = 7x - 1$, ce n'est pas forcément vrai, il faut voir. En plus, la règle du jeu doit être bien précisée. Quel genre de nombre cherche-t-on ? Réel ? Rationnel ? Entier ? etc. Raisonnons sur des exemples.

● 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x + 1 = 2$.

Règle générale : ne jamais se laisser impressionner. Une équation comme celle-ci avoue tout de suite : « **solution $x = 1$** ». Car $1 + 1 = 2$.

● 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x + 3 = 7x - 1$.

Ici, un soupçon de calcul est nécessaire. On met tous les termes en x dans le même membre. N'oubliez pas qu'il faut changer le signe des termes qui changent de membre !

Effectuons le passage $3 + 1 = 7x - 2x$. Puis, $4 = 5x$. Lecture « à l'envers » : $5x = 4$.

Division par 5 (on a le droit si on le fait dans les deux membres) :

$$\frac{5}{5}x = \frac{4}{5}$$

Or $\frac{5}{5} = 1$, d'où la **solution $x = \frac{4}{5}$** .

● 3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ (l'ensemble des entiers relatifs, c'est-à-dire positifs et négatifs) : $x^2 = 4$.

Mieux vaut ne pas répondre trop vite « $x = 2$ », car le carré de -2 est AUSSI égal à 4. L'équation a donc deux solutions, on dit aussi « racines », 2 et -2 . C'est sans doute la raison pour laquelle certains préfèrent procéder autrement :

passer « tout à gauche », $x^2 - 4 = 0$.

Remarque : $4 = 2^2$. D'où différence de deux carrés :

$$x^2 - 2^2 = 0.$$

Qui peut s'écrire $(x + 2)(x - 2) = 0$.

Ce qui présente au moins l'avantage de « montrer » les **deux solutions, 2 et -2** .

● 4) Résoudre dans $\mathbb{N}$: $4x = 5$.

Un nombre qui multiplié par 4 donne 5 ne peut être que $\frac{5}{4}$.

Or, la règle du jeu dit qu'on cherche uniquement les solutions en nombres entiers.

$\frac{5}{4}$ n'est pas un nombre entier mais une fraction.

Ainsi posée, l'équation n'admet donc **aucune solution**. On dit parfois dans ce cas : « équation impossible ».

● 5) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4x^2 + 5 = 0$.

Tout le monde est d'accord, un carré (x^2) est nécessairement positif ou nul. Il en est de même pour $4x^2$. Dans le pire des cas, le membre de gauche est donc égal à 0 + 5 ; en aucun cas il ne peut être inférieur à cette valeur. Donc **pas de solution dans $\mathbb{R}$** .

► Inégalités, terrain miné ◀

Dans les calculs avec $<$ (inférieur à) ou $>$ (supérieur à), il y a un piège, toujours le même. La difficulté vient de ceci : pour les additions ou les soustractions, on change de membre en changeant de signe, comme avec « = ». Mais pour multiplier (ou diviser), on doit faire **attention au signe du multiplicateur** (ou du diviseur). S'il est positif, alors R.A.S : $<$ reste $<$ et $>$ reste $>$. Au contraire, **s'il est négatif**, on doit, en même temps qu'on multiplie (ou divise), **changer le sens** : $<$ devient $>$ et $>$ devient $<$.

Vérifions sur un cas particulier : il est vrai que $-3 < 2$. Multiplions tout ça par -1 , cela donne $3 > -2$. Toujours correct. Si on avait oublié de changer le sens de l'inégalité, on aurait écrit quelque chose de faux. En cas d'hésitation, un exemple aussi simple que celui-ci remet vite les pendules à l'heure.

Exemples :

$$1) \frac{1}{3}x - 2 < x + 4 \text{ est équivalent à } x - 6 < 3x + 12.$$

»»



JE VOIS... JE VOIS...
JE VOIS UNE SORTE DE
POINTE À L'ENVERS
AVEC UN BATON SUR LE
CÔTÉ ET EN DESSOUS
Y'A COMME UN
ZIGOUIGOU EN
SPAGHETTI...

$\sqrt{3}$ QUOI !

HÉ BIN
C'EST PAS
GAGNÉ !

»»



On a multiplié par 3 des deux côtés, sans changer le signe de l'inégalité puisque 3 est positif.

2) $-x + 1 < -2x + 7$ est équivalent à $x - 1 > 2x - 7$.

On a multiplié par -1 : $<$ est devenu $>$.

3) $-3x + 6 > 6x - 9$ est équivalent à $-x + 2 > 2x - 3$.

On a divisé par 3.

4) $-3x + 6 > 6x - 9$ est équivalent à $x - 2 < -2x + 3$.

On a divisé cette fois par -3 .

5) $-x < 7$ donne (changement de membre) $-7 < x$

puis (lecture à l'envers) $x > -7$.

Autre méthode : $-x < 7$ donne (multiplication par -1) $x > -7$.
Deux chemins possibles, mais un seul et même résultat.

» Où passe la frontière ? «

Un binôme est une expression du type $ax + b$. Un problème archiclassique consiste à vous demander : quel est son signe ?
Démarrons par un exemple : $4x + 2$. Le signe de ce binôme dépend de la valeur attribuée à x . Ainsi pour $x = 1$, on trouve $4x + 2 = 6$: binôme positif. Au contraire pour $x = -1$, on trouve $4x + 2 = -2$: binôme négatif. Alors, comment trouver toutes les valeurs qui « rendent positif » (ou négatif) ?

Facile, il suffit de résoudre : $4x + 2 > 0$.

On trouve $4x > -2$, d'où $x > -\frac{2}{4}$ et enfin, $x > -\frac{1}{2}$.

Et on trouverait que $4x + 2$ est négatif pour tout $x < -\frac{1}{2}$. Donc, $-\frac{1}{2}$ est la « valeur frontière ».

D'un côté, les positifs (qui rendent le binôme positif), de l'autre, les négatifs. C'est plus clair sous forme d'un petit tableau :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x + 2$		0	

Ceci convient-il à tous les binômes ? Abandonnons l'exemple et généralisons, pour voir, sur le binôme en $x : ax + b$.

Attention, les deux coefficients (a et b) ne sont pas tout à fait logés à la même enseigne. Pour b , tout est permis, mais pas pour a . Jugez vous-même. Si « a » prenait la valeur zéro, le terme ax disparaîtrait et il ne resterait que le terme constant « b ». C'est pourquoi il est bien de poser $a \neq 0$ (se lit : a différent de zéro).

Où passe la « frontière » ? On écrit simplement $ax + b = 0$. La valeur frontière est alors la solution de cette équation :

$$x = -\frac{b}{a}$$

Maintenant, quel est le signe du binôme ?

Tâchons de résoudre $ax + b > 0$ (on en déduira simplement $ax + b < 0$).

On tire $ax > -b$, mais pour la suite, ATTENTION, terrain glissant ! À cause du signe de « a », il faut distinguer deux cas.

● Premier cas : $a > 0$.

De $ax + b > 0$, on passe à $ax > -b$, puis à $x > -\frac{b}{a}$.

On voit aussitôt que $ax + b < 0$ pour $x < -\frac{b}{a}$.

● Deuxième cas : $a < 0$.

De $ax + b > 0$, on passe à $ax > -b$, PUIS $x < -\frac{b}{a}$

(l'inégalité a changé de sens !).

D'où $ax + b < 0$ pour $x > -\frac{b}{a}$.

Deux petits tableaux pour récapituler :

x	$-\frac{b}{a}$	
$ax + b$	0	

$a > 0$

x	$-\frac{b}{a}$	
$ax + b$	0	

$a < 0$

En somme :

« Si a positif, c'est moins suivi de plus.

Si a négatif, c'est plus suivi de moins.

Et c'est à la frontière que ça change. »

Exemple, avec la même frontière égale à 1 :

1) $3x - 3$ est négatif pour $x < 1$ et positif pour $x > 1$ (– suivi de +) ;

2) $-3x + 3$ est positif pour $x < 1$ et négatif pour $x > 1$ (+ suivi de –).

» Le tableau qui dit tout «

Question : quel est le signe d'un produit de plusieurs binômes ?

Pas de quoi avoir peur : il faut appliquer la règle des signes.

Vous l'avez oubliée ? Alors revenons-y :

« Deux fois le même signe alors c'est +.

Deux signes contraires alors c'est –. »

Exemples : $(-3)(-2) = +6$; $(3)(2) = 6$;
 $(3)(-2) = -6$; $(-3)(2) = -6$.

Supposons que nous voulions connaître le signe de

$T(x) = (x + 1)(x - 2)$, selon la valeur attribuée à x .

Premier facteur : c'est le binôme $x + 1$, où $a = 1$ et $b = 1$.

On connaît la musique. Chercher la frontière : $-\frac{b}{a} = -1$.

Regarder le signe de a : positif.

Alors « c'est moins suivi de plus ». $x + 1$ est négatif pour toute valeur de $x < -1$, nul pour $x = -1$ et positif pour $x > -1$.

Deuxième facteur : c'est le binôme $x - 2$. Même travail que précédemment : $a = 1$ (positif), $b = -2$; frontière :

$$-\frac{b}{a} = 2.$$

C'est donc encore « moins suivi de plus ». Facteur négatif pour $x < 2$, nul pour $x = 2$, positif pour $x > 2$.

Comment marier les deux facteurs ?

Selon la règle des signes. Pour $x = 1$, le premier facteur est positif et le second négatif : le trinôme $T(x) = (x + 1)(x - 2)$ est négatif. À quoi bon tout cela, direz-vous, quand il suffit de calculer $T(1) = (1 + 1)(1 - 2) = -2$, et ainsi constater un résultat négatif ?

»»

» Justement, UN résultat... et un seul. Si on en veut 72 autres, on devra recommencer 72 fois ce petit calcul.

Il y a bien plus malin, si l'on commence par remarquer que 1 est compris entre les deux frontières (-1 et 2) et que la conclusion quant au signe de $T_{(1)}$ serait inchangée pour tout autre nombre logé à la même enseigne. C'est comme une infinité de petits calculs qu'on n'aura jamais à faire.

Et pour les nombres logés ailleurs qu'entre les frontières ? Simple : les deux facteurs ont le même signe et $T_{(x)}$ est positif. Un petit tableau dit la même chose en plus clair :

x	-1	2
$x+1$	- 0 +	+
$x-2$	-	- 0 +
$T_{(x)} = (x+1)(x-2)$	+ 0 -	0 +

S'il y a trois ou quatre ou n facteurs, il suffit de mettre trois ou quatre ou n lignes au tableau. Puis, de généraliser la règle des signes en comptant les signes « - » : nombre pair c'est « + », nombre impair c'est « - ».

Exemples :

1) $T_{(x)} = (3-x)(x-5)$

x	3	5
$3-x$	+ 0 -	-
$x-5$	-	- 0 +
$T_{(x)}$	- 0 +	0 -

Frontières : 3 ; 5.

2) $P_{(x)} = (x+2)x(1-x)$

x	-2	0	1
$x+2$	- 0 +	+	+
x	-	- 0 +	+
$1-x$	+	+	0 -
$P_{(x)}$	+ 0 -	0 +	0 -

Frontières : -2 ; 0 ; 1.

3) $P_{(x)} = (2x-1)(3-2x)(x+2)(1+x)$

x	-2	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$2x-1$	-	-	- 0 +	+
$3-2x$	+	+	+	0 -
$x+2$	- 0 +	+	+	+
$1+x$	-	- 0 +	+	+
$P_{(x)}$	- 0 +	0 -	0 +	0 -

Frontières : -2 ; -1 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$.

> L'âge du capitaine <

Sachant que la somme des âges du capitaine et du matelot est de 65 et le produit de leurs âges est de 966, quel est l'âge du capitaine ? Celle-là, on a dû vous la proposer cent fois les après-midi pluvieux de vacances. Pourtant, ne boudez pas cette devinette : elle recèle un truc mathématique qui peut vous sortir de pas mal de problèmes. Ce truc, c'est le calcul de la somme et du produit des racines d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, normalement constituée. Autrement dit, avec « a » pas nul et Δ positif, donc avec deux racines.

Après avoir écrit les racines x' et x'' de cette équation, calculez leur somme $S = x' + x''$ et leur produit $P = x'x''$. Voici ce que ça donne.

L'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Les racines :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

La somme :

$$S = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Le produit :

$$P = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{2a \times 2a}$$

$$P = \frac{(b - \sqrt{\Delta})(b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$P = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Conclusion :

$$S = -\frac{b}{a}; P = \frac{c}{a}$$

Calculs faciles, résultats étonnants ! Il y a encore plus à tirer de ça, et pour pas cher ! Regardez un peu :

soit $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, Δ positif (pour avoir l'esprit tranquille). Puisque a n'est pas nul, on peut tout diviser par a :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \left(\frac{0}{a} = 0, \text{ c'est clair} \right)$$

prodige ! $\frac{b}{a} = -S$ (gare au signe) et $\frac{c}{a} = P$.

Conclusion : deux nombres (inconnus) dont la somme est S et le produit P sont les racines de l'équation :

$$X^2 - SX + P = 0.$$

Revenons à l'âge du capitaine : trouver deux nombres dont la somme est 65 et le produit 966. Ces deux nombres sont racines de $x^2 - 65x + 966 = 0$.

$$\Delta = 65^2 - 4 \times 966 = 4225 - 3864 = 361 = 19^2.$$

D'où $x' = \dots = 23$ et $x'' = \dots = 42$.

Le capitaine étant le plus âgé, il a donc 42 ans et le matelot 23 ans.

La solution pouvait être devinée assez facilement... mais qu'en serait-il avec deux nombres dont la somme est -2 et le produit $0,91$?

(Réponse : $-1,3$ et $-0,7$)

► Delta à 0% de matières grasses ◀

Posons que b est pair. Une évidence s'impose aussitôt : un nombre pair est divisible par deux. Autrement dit, si b est pair, il est égal au double de sa moitié b' . On écrit donc $b = 2b'$. Quésaco b ? Le deuxième coefficient d'une équation du second degré pardi !

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

Dont le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ devient :

$$\Delta = (2b')^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4b'^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4(b'^2 - ac)$$

$$\Delta = 4\Delta' \text{ en posant } \Delta' = b'^2 - ac.$$

Pensons peu mais pensons bien : cette dernière égalité nous dit que Δ et Δ' sont de même signe. Or, souvent, c'est seulement le signe de Δ qui nous intéresse (et non sa valeur). Il suffira donc de calculer Δ' qui est 4 fois plus petit que Δ . Ce « discriminant réduit » est plus facile à calculer et rend le même service que Δ . Et du côté des racines ? On gagne aussi. La preuve :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}; x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4\Delta'}}{2a};$$

$$x = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{\Delta'}}{2a}; x = \frac{2(-b' \pm \sqrt{\Delta'})}{2a}.$$

$$\text{Enfin, } x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

Ici encore le calcul est bien allégé.

Résumé : si b est pair, $b = 2b'$, $\Delta' = b'^2 - ac$ et $x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$.

Exemple : $x^2 - 16x + 63 = 0$, $a = 1$; $b' = -8$; $c = 63$; $\Delta' = 64 - 63 = 1$; $x'' = 9$.

► Si vous avez manqué le coche ◀

Vous avez une équation du second degré à résoudre. Sa forme ne vous dit rien, vous n'y détectez aucune factorisation. Vous vous lancez donc dans le calcul de Δ . Et vous trouvez $\Delta = 0$. « Bon sang, j'ai loupé une factorisation ! » Tout n'est pas perdu : vous pouvez encore vous dispenser de calculer les racines avec de longues formules. Un moindre effort suffira.

Démonstration :

si Δ est nul, on sait qu'il y a une racine double $x' = x''$. Dans ce cas, la somme $S = x' + x'' = x' + x' = 2x'$.

$$\text{Calculons : } S = 2x' = -\frac{b}{a}, \text{ d'où } 2x' = -\frac{b}{a}.$$

$$\text{On en tire } x' = x'' = -\frac{b}{2a}. \text{ Et le tour est joué.}$$

$$\text{Exemple : } 25x^2 - 70x + 49 = 0;$$

$$\Delta = 4900 - 4 \times 25 \times 49 = 0;$$

$$x' = x'' = \frac{70}{50} = \frac{7}{5}.$$

La factorisation que vous avez manquée était donc :

$$(5x - 7)(5x - 7) = 0.$$

»»

»»

> L'œil et la truffe <

Les problèmes du second degré sont parsemés de « racines évidentes ». De l'œil et du nez vous permettront de les débusquer sans effort. Surtout après une petite visite aux cas célèbres, et sur des exemples.

1) Équations incomplètes.

- $3x^2 - 12x = 0$ devient $3x(x - 4) = 0$. Racines : 0 et 4.
- $9x^2 - 25 = 0$ devient $(3x + 5)(3x - 5) = 0$

(c'est une « identité remarquable »). Racines : $\pm \frac{5}{3}$.

2) Identités remarquables de la forme $A^2 - 2AB + B^2$ ou $A^2 + 2AB + B^2$ (voir article page 7).

- $9x^2 + 30x + 25 = 0$ devient $(3x + 5)^2 = 0$.
Racines : $x' = x'' = -\frac{5}{3}$.

- $4x^2 - 12x + 9 = 0$ devient $(2x - 3)^2 = 0$.
Racines : $x' = x'' = \frac{3}{2}$.

3) Somme des coefficients particulière.

- Si $ax^2 + bx + c = 0$ admet pour racine 1, cela se voit tout de suite car alors, $a + b + c = 0$ et l'autre racine est égale au produit :

$$x'x'' = \frac{c}{a} \text{ devient } 1x' = \frac{c}{a}, \text{ d'où } x' = 1 \text{ et } x'' = \frac{c}{a}.$$

$$3x^2 + 5x - 8 = 0, \text{ on remarque : } 3 + 5 - 8 = 0.$$

$$\text{Racines : } 1 \text{ et } -\frac{8}{3}.$$

- Si $ax^2 + bx + c = 0$ admet pour racine $x' = -1$, $a - b + c = 0$.

$$x'x'' = \frac{c}{a} \text{ devient } -1x' = \frac{c}{a}, \text{ d'où } x' = -1 \text{ et } x'' = -\frac{c}{a}.$$

$$2x^2 + 10x + 8 = 0, \text{ on « voit » : } 2 - 10 + 8 = 0.$$

$$\text{Racines : } -1 \text{ et } -4.$$

4) La somme et le produit permettent de deviner les racines.

- $x^2 - 9x + 20 = 0$; $S = \frac{-b}{a} = 9$ et $P = \frac{c}{a} = 20$.
Racines : 4 et 5.



- $x^2 - 14x + 33 = 0$; $S = 14$ et $P = 33$.

$$\text{Racines : } 11 \text{ et } 3.$$

Toutes ces équations sont de la forme $X^2 - SX + P = 0$.

► La boule de cristal ◀

Dans certains cas, il y a moyen de savoir à toute vitesse si une équation du second degré possède deux racines distinctes. La boule de cristal qu'on utilise est très simple : il suffit que a et c soient de signes contraires !

Prenons pour exemple l'équation $-2x^2 + 5x + 7 = 0$. A-t-elle des racines ? Calculons :

$$\Delta = 5^2 - 4(-2)(7) = 25 + 4 \times 2 \times 7.$$

Inutile d'aller plus loin. À cause du signe « + », ce Δ est certainement positif et l'équation a deux racines distinctes.

Et c'était prévisible.

Explication :

Dans le calcul numérique de Δ , le premier signe « - » est « inévitable » : il vient de $b^2 - 4ac$. Pour faire apparaître une somme et non une différence, il faut un second signe « - » (et surtout un seul) dans l'un des facteurs qui suivent le 4. C'est-à-dire soit dans a , soit dans c . Autrement dit, il suffit que a et c soient de signes contraires pour que Δ soit positif et que, par conséquent, l'équation ait deux racines distinctes. Attention, la réciproque n'est pas vraie ! Si a et c sont de même signe, il faut calculer Δ pour en savoir plus. Pour vous faire le coup d'œil, en voici quelques-unes du même tonneau :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2x^2 + 5x - 7 = 0 & \text{b) } -x^2 + 3x - 3 = 0 \\ \text{c) } x^2 + x + 1 = 0 & \text{d) } x^2 - x - 1 = 0 \\ \text{e) } -3x^2 - x + 5 = 0. & \end{array}$$

Réponse : a), d) et e) ont deux solutions distinctes à coup sûr. Pour les deux autres, on ne peut rien dire sans calculer Δ .

► La poupée russe qui fait m ◀

Jusqu'ici, vous avez été ménagés. Les coefficients a , b et c avaient toujours une valeur fixe. Mais tout se corse si l'on décide qu'un de ces coefficients va varier comme bon lui semble. Appelons cet instable « m le paramètre ». Pas besoin d'être très malin pour voir venir la suite : si a , b et c changent, tout ce qui dépend d'eux change aussi. Le signe de Δ , de S et de P , ça va, ça vient. À nous d'en tirer les conclusions sur des exemples.

1) Pour quelles valeurs de m l'équation $x^2 - 4x + m = 0$ possède-t-elle des racines ? On précisera le signe des racines lorsqu'elles existent.

Solution : c'est le signe de Δ qui commande l'existence des racines. Calculons donc Δ' , on verra bien. Puisque $a = 1$, $b = -4$ et $c = m$, $\Delta' = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4m = 16 - 4m$. Dont le signe est

facile à étudier sur un air connu : valeur frontière = 4 et « plus suivi de moins ». En clair, pour toute valeur de m inférieure à 4, Δ est positif et l'équation a deux racines.

Pour $m = 4$, $\Delta' = 0$ et l'équation devient $x^2 - 4x + 4 = 0$ dont les racines (évidentes) sont $x' = x'' = 2$.

Enfin, pour m supérieur à 4, Δ' est négatif et l'équation n'admet aucune solution.

C'est le signe du produit qui nous dit si les racines sont de même signe ou non. Calculons donc P .

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m}{1} = m.$$

Lorsque m est positif, les racines (si elles existent, c'est-à-dire pour m inférieur à 4) sont de même signe ; au contraire, si m est négatif, l'une est négative et l'autre positive.

Coup d'œil à la somme : $S = \frac{-b}{a} = 4$, toujours positive.

Moralité : ou bien les racines sont toutes les deux positives ou bien elles sont de signes contraires ; dans le second cas, c'est la racine positive qui l'emporte (le matheux dit qu'elle a la plus grande valeur absolue).

Petit tableau pour récapituler tout ça :

m	$-\infty$	0	4	$+\infty$
Δ	+	+	0	-
$P = m$	-	0	+	+
$S = 4$	+	+	+	+
Conclusions	2 racines de signes contraires $x' < 0 < x''$ $ x'' > x' $	2 racines positives $0 < x' < x''$		pas de racines
		$x' = 0$ $x'' = 4$	$x' = x'' = 2$	

2) Vous avez compris l'idée ? En voici une avec les réponses sans trop de commentaires.

Étudier l'existence et le signe des racines de l'équation du second degré $mx^2 - 3x + m = 0$, avec $m \neq 0$.

$$\Delta = 9 - 4m^2 ; P = \frac{m}{m} = 1 ; S = \frac{3}{m}.$$

Vous avez peut-être remarqué que Δ est une différence de deux carrés :

$$\Delta = 9 - 4m^2 = (3 - 2m)(3 + 2m).$$

» Et hop, on retombe sur une équation du second degré à l'intérieur d'une équation du second degré. Bref, une histoire de poupées russes.

m	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$3-2m$	+	+	0	-
$3+2m$	-	0	+	+
Δ	-	0	+	-

$$\Delta = (3-2m)(3+2m)$$

m	$-\infty$	0	$+\infty$
$S = \frac{3}{m}$	-	+	+

m	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Δ	-	0	+	+	-
$P = 1$		+	+		
$S = \frac{3}{m}$		-	+		
Conclusions	pas de racines	2 racines négatives $x'' < x' < 0$	2 racines positives $0 < x' < x''$		pas de racines

$$x' = x'' = -1$$

$$x' = x'' = 1$$

3) Encore une petite : existence et signe des racines de $(m-4)x^2 - 2(m-2)x + m-1 = 0$, avec $m \neq 4$.
 $\Delta' = b'^2 - ac = (m-2)^2 - (m-4)(m-1) = m$

m	$-\infty$	0	$+\infty$
$\Delta = m$	-	0	+

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m-1}{m-4}$$

m	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$m-1$	-	0	+	+
$m-4$	-	-	+	+
P	+	0	-	+

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{2(m-2)}{m-4}$$

m	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$m-2$	-	0	+	+
$m-4$	-	-	+	+
S	+	0	-	+

Les valeurs remarquables de m classées dans l'ordre croissant sont : 0 ; 1 ; 2 ; 4.

Tableau récapitulatif :

m	$-\infty$	0	1	2	4	$+\infty$
Δ	-	0	+	+	+	+
P		+	0	-	-	+
S		+	+	0	-	+
Conclusion	pas de racines	2 racines positives $0 < x' < x''$	2 racines de signes contraires La positive l'emporte $x' < 0 < x''$	2 racines de signes contraires La négative l'emporte $x'' < 0 < x'$		2 racines positives $0 < x' < x''$

l'équation devient
 $(2x-1)^2 = 0$
 $x' = x'' = \frac{1}{2}$

$x' = 0$
 $x'' = S = \frac{2}{3}$

$x' = -x''$
 $= \sqrt{-P}$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

l'équation dégénère en 1^{er} degré
 $x = \frac{3}{4}$



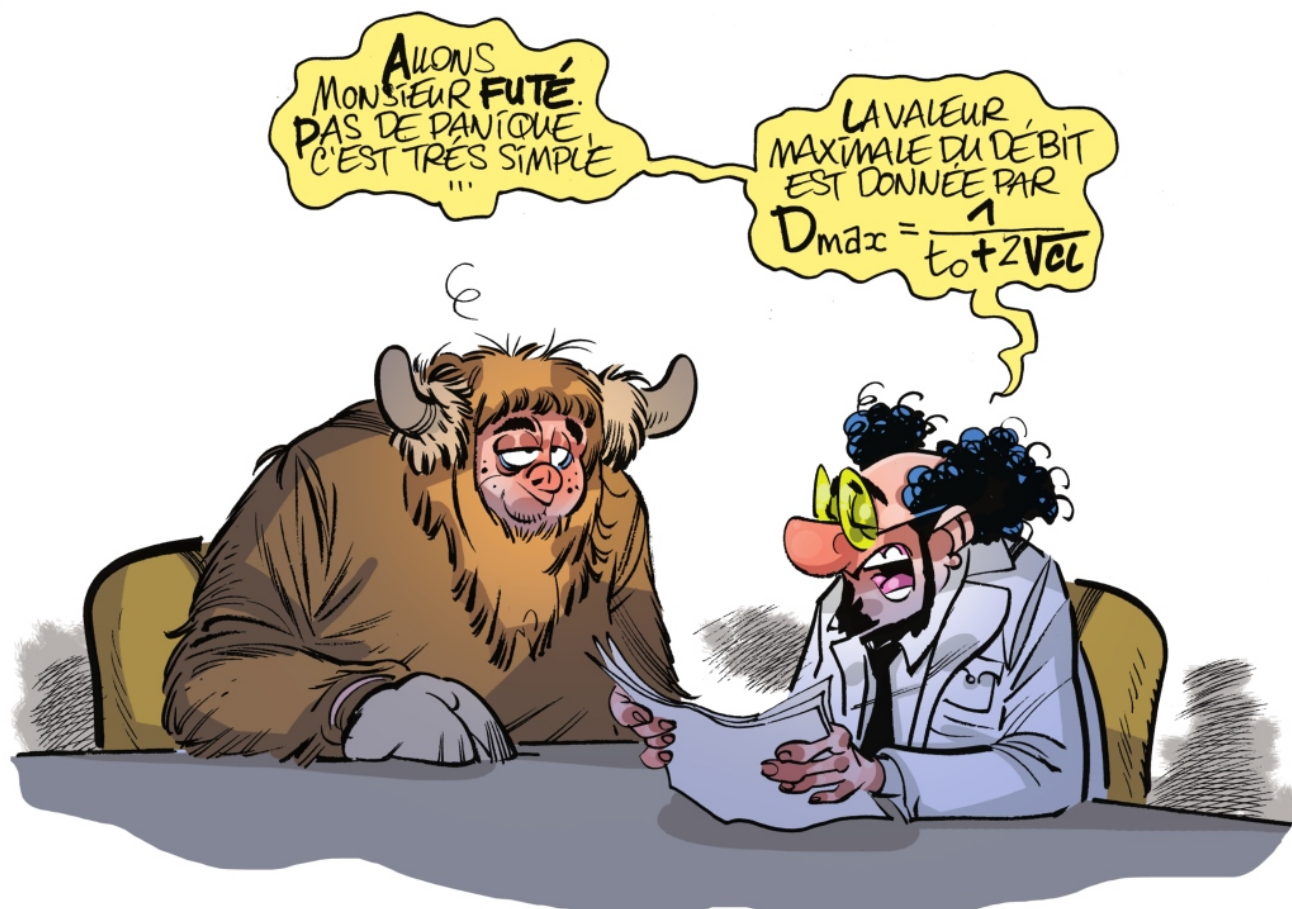


COMMENT FAIRE SAUTER LES BOUCHONS?

Englué dans un embouteillage, vous avez sûrement cherché en vain ce qui pourrait constituer un remède : imposer la circulation en patins à roulettes, brûler tous les camions ou interdire de permis les chauffeurs les plus lents. Au fait, savez-vous quelle est la vitesse qui assure la meilleure fluidité du trafic ? Lisez cette histoire qui vous éclairera sur la question.

↳ GILLES PAGÈS
Université Paris-VI





La famille Petitix transpire à grosses gouttes. Les vacances sont finies et le piège des grands retours s'est refermé sur l'autoroute du Soleil. Bref, les Petitix sont coincés dans un énorme embouteillage.

« Quel enfer, soupire le père. Bison futé est une buse ! Je le savais, il fallait partir plus tôt. Je n'aurais pas dû vous écouter. Limiter la vitesse, c'est très bien, mais, nom d'une pipe, il faudrait aussi songer à instaurer une vitesse minimale ! Si tout le monde roulait à, je ne sais pas moi, 80 km/h, les bouchons ne seraient plus qu'un mauvais souvenir !

– Tu crois vraiment ? risque la fille aînée.

– Évident, Julie ! Un batracien trépané le comprendrait !

– Tout faux ! Ce n'est certainement pas la solution pour éviter les bouchons...

– Ah, mademoiselle je-sais-tout se réveille...

– La mission d'une autoroute, poursuit-elle, imperturbable, c'est de faire passer un maximum de gens en un minimum de temps sur chaque tronçon du parcours, d'accord ? Pour ça, il faut augmenter le débit, en s'arrangeant pour que les voitures roulent à une vitesse à peu près constante et ne doublent pas trop pour éviter les coups d'accordéon. On appelle ça le débit stabilisé !

– Mais encore, miss Einstein ?

– Le débit stabilisé est le nombre de voitures qui franchissent à vitesse constante une ligne fictive tracée sur la route durant une heure de temps. J'ai lu que ce débit stabilisé se calcule en

divisant la vitesse v par la distance entre deux voitures, de pare-chocs avant à pare-chocs avant (voir encadré 1). La formule qui donne le débit stabilisé D à vitesse v est simple :

$$D = \frac{v}{\text{distance entre deux (avants de) voitures}}$$

– C’est bien ce que je disais, bon sang de bois ! triomphe M. Petitix. Plus on va vite, plus le débit augmente, ce n’est vraiment pas sorcier...

– Encore faux, et dangereux de surcroît, mon cher papa. Car les freins ont impérativement besoin d’une distance proportion-

nelle à l’énergie cinétique (zoom) du véhicule pour parvenir à l’immobiliser.

– Tu fais ton intéressante. Tu ne peux pas dire simplement que plus on va vite, plus il faut d’espace pour s’arrêter ?

– Soyons précis : cette énergie cinétique augmente comme le carré de la vitesse. Elle vaut exactement :

ZOOM

L’énergie cinétique, c’est l’énergie de mouvement de la voiture. La ralentir, c’est diminuer cette énergie cinétique en en faisant autre chose. Les freins, en action, transforment l’énergie cinétique en chaleur.

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

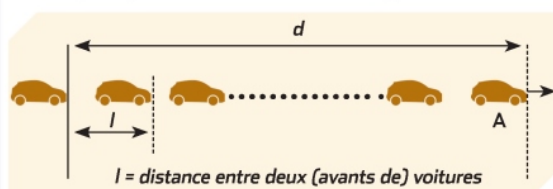
où m est la masse de la voiture. Heureusement, la puissance des freins prend en compte cette masse. Finalement, la distance nécessaire aux freins pour dissiper l’énergie cinétique en chaleur est de la forme Cv^2 . Plus la constante C est petite, mieux tu freines (voir encadré 2). À cela s’ajoute la distance

1 DÉBIT STABILISÉ

« Stabilisé » signifie que toutes les voitures roulent à la même vitesse constante et maintiennent entre elles des espaces égaux et constants. La formule de la vitesse est valable justement si celle-ci est constante. Le mobile parcourt la distance d en un temps t et on a :

$$v = \frac{d}{t}$$

Pour les besoins de la cause on suppose que la route est droite sur une grande longueur et on la représente une heure après que la voiture A a franchi la ligne :



Trouver le débit stabilisé D , cela revient à déterminer le nombre de voitures qui ont franchi la ligne en une heure. Autrement dit, il s’agit de trouver combien de fois l est contenu dans d :

$$D = \frac{d}{l}$$

or $d = vt$, d’où $D = \frac{vt}{l}$, et en fixant t à 1 heure :

$$D = \frac{v}{l}$$

Le débit s’exprime donc en « voitures par heure ».

2 DISTANCE DE FREINAGE

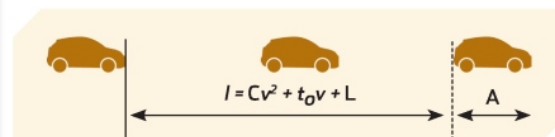
« Les freins ont besoin d’une distance proportionnelle à l’énergie cinétique », cela s’écrit :

$$x = K \frac{1}{2}mv^2$$

x est la distance de freinage et K la constante de proportionnalité. K , $1/2$ et m sont des valeurs constantes ; leur produit aussi. La voilà donc cette « constante de freinage » :

$$C = K \frac{1}{2}m$$

La distance de freinage s’écrit bien $x = Cv^2$. Le chemin parcouru pendant le « temps de réaction t_0 » se calcule à partir de la formule de la vitesse $d = t_0v$. Gros plan sur la figure précédente :



On suppose que toutes les voitures ont la même longueur L .

C’est ainsi que $D = \frac{v}{l}$ devient $D = \frac{v}{Cv^2 + t_0v + L}$.

- » parcourue par la voiture entre le moment où tu comprends qu'il faut freiner et celui où ton pied enfonce la pédale : c'est ton temps de réaction, $t_0 = 1$ s environ. Pendant ce temps, tu parcoures une distance de $t_0 v$ (en mètres). Enfin, si tu veux éviter le pare-chocs arrière de la voiture de devant, il faut encore ajouter la longueur L du véhicule qui te précède.
- Ce n'est valable que si la voiture de devant s'arrête pile sur place ! » ferraille le conducteur.
 - C'est le cas dans les carambolages ! Au total, tu dois te placer à une distance de :

$$I = Cv^2 + t_0 v + L.$$

Évidemment, la constante C varie un peu selon les véhicules, leur état et leur chargement, mais elle reste toujours du même

3 SECOND DEGRÉ

Point de départ :

$$D = \frac{v}{Cv^2 + t_0 v + L}.$$

En chassant le dénominateur :

$$D(Cv^2 + t_0 v + L) = v;$$

tout dans le premier membre :

$$DCv^2 + Dt_0 v + DL - v = 0;$$

enfin v en facteur :

$$DCv^2 + (Dt_0 - 1)v + DL = 0.$$

Voilà donc une équation du second degré en v de la forme :

$$av^2 + bv + c = 0$$

où $a = DC$; $b = Dt_0 - 1$ et $c = DL$.

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (Dt_0 - 1)^2 - 4DCDL \\ &= (Dt_0 - 1)^2 - 4D^2CL. \end{aligned}$$

Produit :

$$P = v'v'' = \frac{c}{a} = \frac{DL}{DC} = \frac{L}{C};$$

somme :

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(Dt_0 - 1)}{DC}$$

P est positif parce que L et C le sont, donc v' et v'' sont de même signe, règle des signes oblige. Ces vitesses seront donc positives dès lors que leur somme S le sera. Observons bien que le dénominateur de cette fraction DC est positif car D et C le sont. Pour avoir S positif, il faut que le numérateur soit lui aussi positif, soit $Dt_0 - 1 \leq 0$.

Résumé : on doit avoir tout à la fois,
 $(Dt_0 - 1)^2 - 4D^2CL \geq 0$ et $Dt_0 - 1 \leq 0$.

ordre de grandeur. Finalement, le débit de l'autoroute et la vitesse des voitures qui y roulent sont liés par l'équation :

$$D = \frac{v}{Cv^2 + t_0 v + L}$$

que l'on met aussitôt (voir encadré 3) sous la forme :

$$DCv^2 + (Dt_0 - 1)v + DL = 0.$$

M. Petitix trouve là à se mettre à son avantage.

« Tiens, on dirait une équation du second degré.

– C'EST une équation du second degré où v est l'inconnue. Et pour qu'elle ait des solutions, il faut que son discriminant soit positif ou nul. »

Dans la mémoire de M. Petitix, un vieux souvenir remonte.

« Le discriminant, c'est delta !

– Tu as de beaux restes, mon vieux papa... mais cela ne suffit pas car la physique et les maths ne sont pas tout à fait la même chose. Pour que le résultat ait un sens, il faut en plus que l'une au moins des vitesses solutions soit positive.

– Et comment fait-on pour savoir si cette vitesse solution est positive sans la calculer ?

– Heureusement, il y a des formules magiques qui permettent de le savoir ! C'est le produit des racines :

$$v'v'' = \frac{c}{a},$$

et la somme des racines :

$$v' + v'' = \frac{-b}{a}.$$

Le produit des racines est strictement positif, il vaut :

$$\frac{DL}{DC} = \frac{L}{C}.$$

Les deux racines sont donc nécessairement de même signe. Elles seront positives dès que leur somme

$\frac{Dt_0 - 1}{DC}$ le sera, c'est-à-dire dès que $Dt_0 - 1 \leq 0$.

– Tiens, une aire de repos. Je propose que l'on s'arrête pour finir les calculs. Au point où on en est ! »

Cinq minutes plus tard... Julie reprend.

»



COMMENT FAIRE SAUTER LES BOUCHONS ?

» « Résumons : on veut que le discriminant Δ (Delta) de l'équation, qui vaut : $\Delta = (D t_0 - 1)^2 - 4 D C D L = (D t_0 - 1)^2 - 4 D^2 C L$, soit positif ou nul.

On veut aussi que le coefficient $(D t_0 - 1)$ soit négatif ou nul. »

M. Petitix est un tantinet perdu.

« Euh, ben...

– Pas de panique, p'pa. Résoudre ce genre d'inéquation du second degré est juste une affaire de tour de main. Je vais te faire un tableau (voir encadré 4). Voilà, on obtient :

$$D t_0 - 1 \leq -2D \sqrt{C L} \text{ ou } D t_0 - 1 \geq 2D \sqrt{C L}.$$

Seule la première possibilité est acceptable si l'on veut en plus que $D t_0 - 1 \leq 0$.

On en déduit donc que le débit D vérifie toujours l'inégalité :

$$D t_0 - 1 \leq -2D \sqrt{C L} ;$$

soit :

$$D t_0 + 2D \sqrt{C L} \leq 1 \text{ ou encore } D(t_0 + 2\sqrt{C L}) \leq 1.$$

C'est-à-dire enfin :

$$D \leq \frac{1}{t_0 + 2\sqrt{C L}}.$$

« Ah ! elle est calée, ma fille, se dit M. Petitix. Je m'en vais quand même lui poser la question à cent sous. »



« Bien beau tout ça. Mais le débit maximum de l'autoroute, c'est quoi ? Je te rappelle l'objectif du problème : connaître la meilleure vitesse pour assurer le débit maximum !

– J'y viens. Dans la formule :

$$D \leq \frac{1}{t_0 + 2\sqrt{CL}},$$

tu vois bien que la valeur maximum du débit est donnée par :

$$D_{\max} = \frac{1}{t_0 + 2\sqrt{CL}}.$$

4 INÉQUATION

La principale difficulté à résoudre est bien entendu :

$$(Dt_0 - 1)^2 - 4D^2CL \geq 0.$$

Pour y arriver, créons une différence de deux carrés dans le premier membre. Pour cela, il suffit de remarquer que :

$$4D^2CL = (2D\sqrt{CL})^2,$$

on a maintenant : $(Dt_0 - 1)^2 - (2D\sqrt{CL})^2 \geq 0$.

Appliquons $A^2 - B^2$:

$$(Dt_0 - 1 + 2D\sqrt{CL})(Dt_0 - 1 - 2D\sqrt{CL}) \geq 0.$$

À nouveau, on est soumis à la règle des signes : le produit de ces deux facteurs sera positif s'ils sont de même signe. Pour le premier facteur la frontière est $-2D\sqrt{CL}$, et pour le second $+2D\sqrt{CL}$.

Le tableau de signes, ci-dessous (voir aussi article page 53), donne la solution.

Soit :

$$Dt_0 - 1 \leq -2D\sqrt{CL} \text{ ou encore } Dt_0 - 1 \geq 2D\sqrt{CL}.$$

MAIS on veut en plus $Dt_0 - 1 \leq 0$. Seule la première possibilité fait l'affaire :

$$Dt_0 - 1 \leq -2D\sqrt{CL}.$$

$D t_0 - 1$	$-2D \sqrt{CL}$		$+2D \sqrt{CL}$	
$D t_0 - 1 + 2D \sqrt{CL}$	-	0	+	+
$D t_0 - 1 - 2D \sqrt{CL}$	-		-	0
Δ	+	0	-	0

Or cette valeur correspond précisément au cas où le discriminant est nul (voir encadré 5). Dans ce cas, l'équation donnant la vitesse a une racine double v_{opt} (vitesse optimale) donnée par :

$$v_{\text{opt}} = \frac{1 - D_{\max} t_0}{2 D_{\max} C},$$

soit encore, en remplaçant $D_{\max}$ par sa valeur, et en sautant par-dessus les calculs :

$$v_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Un grand silence se fit dans l'auto. Le sieur Petitix est estomaqué. « Mais c'est magnifique. Comment peut-on arriver à une formule aussi simple pour une affaire aussi compliquée ? » se dit-il *in petto*.

« Dis donc ma chérie, dans le dépliant *Sécurité routière*, on donne des distances de freinage en fonction de la vitesse. Avec ça et la formule de l'énergie cinétique, on doit pouvoir calculer ta constante de freinage C ?

– Sûrement, puisque l'on sait que : *distance de freinage* = Cv^2 ! »

5 DISCRIMINANT NUL

Nous venons de résoudre :

$(Dt_0 - 1)^2 - 4D^2CL \geq 0$, c'est-à-dire $\Delta \geq 0$ et pour trouver $D_{\max}$ on a vu qu'il faut se placer dans le « cas limite = 0 ». Ce cas correspond bien à $\Delta = 0$.

Dans ces conditions,

$$v' = v'' = \frac{S}{2} = \frac{-b}{2a},$$

ce qui donne une bonne méthode de calcul :

$$v_{\text{opt}} = v' = v'' = \frac{1 - D t_0}{2DC},$$

toujours avec $D = D_{\max} = \frac{1}{t_0 + 2\sqrt{CL}}$.

$$v_{\text{opt}} = \frac{1 - \frac{t_0}{t_0 + 2\sqrt{CL}}}{2C} = \frac{\frac{t_0 + 2\sqrt{CL} - t_0}{t_0 + 2\sqrt{CL}}}{2C} = \frac{2\sqrt{CL}}{2C} = \frac{\sqrt{CL}}{\sqrt{C^2}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$v_{\text{opt}} = \frac{2\sqrt{CL}}{2C} = \frac{\sqrt{CL}}{\sqrt{C^2}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

et le miracle est accompli.

» Simple arithmétique, dont se charge M. Petitix qui reprend la main.

« Voyons cela :

40 km/h.....	8 m
50 km/h.....	12 m
60 km/h.....	18 m
70 km/h.....	24 m
100 km/h.....	48 m
110 km/h.....	58 m
120 km/h.....	72 m »

Quelques tapotis de calculette plus tard, une fois convertis les kilomètres/heure en mètres/seconde, M. Petitix propose une valeur moyenne de la constante C : « 0,0635 », conclut-il fièrement, complètement pris au jeu et pressentant surtout que son hypothèse de vitesse minimale obligatoire allait être confirmée avec éclat. Avant d'ajouter :

« Et si l'on suppose que la longueur moyenne d'un véhicule est de, disons, environ 4 m, on arrive à une vitesse optimale de 7,9 m/s... »

Une conversion plus tard, M. Petitix lâche d'une voix d'outre-tombe :

« Soit... 28,6 km/h. À cette vitesse-là, mes enfants, il vaut mieux chercher un hôtel tout de suite. » (voir encadré 6) ■

6 CALCULS NUMÉRIQUES

Ils sont faciles car il suffit de reprendre la formule :

$$x = Cv^2 \text{ et en tirant } C = \frac{x}{v^2}.$$

On utilise les unités de base du système international : temps en s, longueurs en m, etc. Les distances de freinages étant données en m, Monsieur Petitix va transformer en m/s les vitesses données en km/h.

Ainsi pour $x = 8$ m et $v = 11,11$ m/s, on trouve :

$$C = \frac{8}{(11,11)^2} = 0,0648.$$

On est en droit de penser que Monsieur Petitix a ainsi fait les sept calculs puis pris la moyenne de ses résultats pour affirmer $C = 0,0635$.

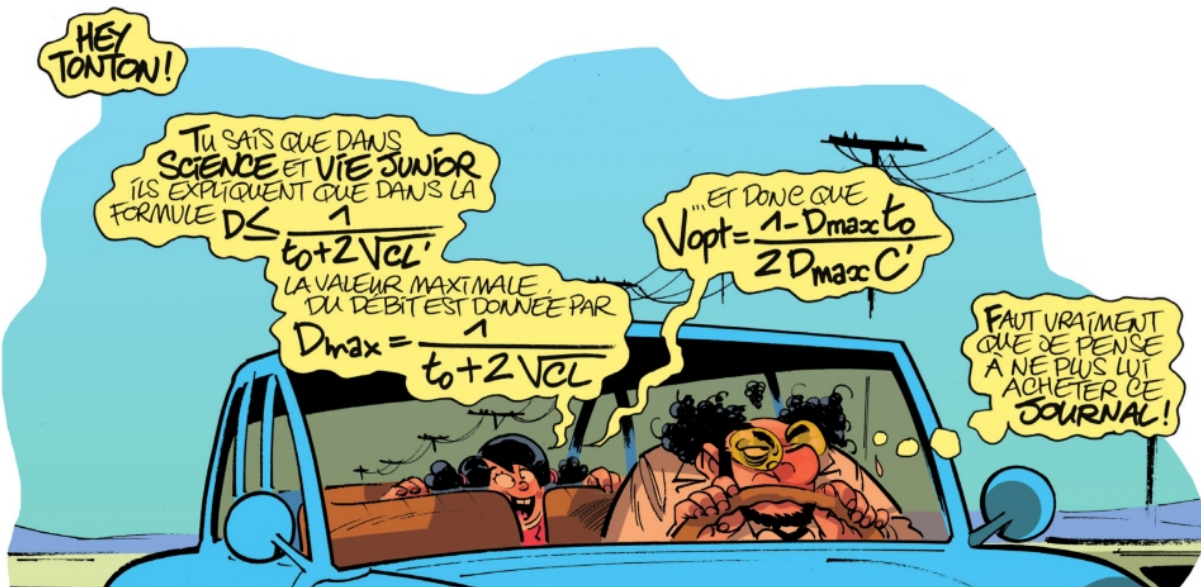
Trouver la vitesse optimale est alors un jeu d'enfant puisqu'il suffit d'appliquer :

$$v_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Si on admet que la longueur de chaque voiture est $L = 4$ m,

$$v_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{4}{0,0635}} = \sqrt{62,99} = 7,937 \text{ m/s}$$

qu'on transforme en km/h, et on trouve bien 28,57 km/h arrondi à 28,6 km/h.





QU'EST-CE QUE LE THÉOREME DE STURM ?

**Charles-François Sturm, inconnu au bataillon ?
Pourtant nous lui devons un petit bijou : la machine à faire
avouer les polynômes les plus vicieux.
C'est simple, pratique et beau.**

GILLES GODEFROY

CNRS. Auteur de *L'Aventure des nombres* (Odile Jacob, 1997)



QU'EST-CE QUE LE THÉORÈME DE STURM ?

Admettons que vous ayez bien potassé ce spécial maths de *Science et Vie Questions/Réponses*. Et que, fier comme Artaban, vous le fassiez savoir autour de vous. À coup sûr, un petit malin voudra vous coincer en glissant une peau de banane du genre : « *Dis donc, le fort en thème, si je te donne le polynôme $x^3 + 6x^2 - 16$, que sais-tu me dire de ses racines ?* » Un polynôme du troisième degré, bigre ! Silence gêné, raclements de gorge : « *Euh, c'est-à-dire, SVQR ne traite que du second degré et...* » Vrai. Mais, pour autant, vous n'êtes pas totalement désarmé face à cette colle. Grâce à Charles-François Sturm.

Ce mathématicien français assez peu connu (1803-1855) a en effet découvert une méthode épatante pour faire parler les polynômes tordus du troisième degré et au-delà. Ça commence tout doux. Savez-vous diviser 7 par 3 ? Ne prenez pas la mouche, c'est juste pour rappeler une précision de vocabulaire. Je divise 7 par 3, j'obtiens 2 et il reste 1 ; 2 est appelé le quotient de la division et 1, le reste. Ce qui peut s'écrire :

$$7 = 3 \times 2 + 1.$$

Un peu de langue matheuse maintenant, histoire de peaufiner la précision et d'élever le débat. Plus généralement, lorsqu'on divise un nombre entier positif A par un nombre entier strictement positif B (c'est-à-dire non nul), on obtient un quotient Q et un reste R. Q et R sont des nombres entiers positifs tels que $A = B \times Q + R$; et B est strictement plus grand que R. Or, ce qui est vrai pour la division des nombres l'est aussi pour la division des polynômes (on l'appelle alors division euclidienne). Si $A(x)$ et $B(x)$ sont deux polynômes à coefficients réels, avec $B(x)$ qui a au moins un terme non nul, il existe un couple unique de polynômes ($Q(x)$, $R(x)$) tels que $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$; le degré de $R(x)$ étant strictement plus petit que celui de $B(x)$.

Par ailleurs, les arithméticiens savent depuis belle lurette qu'une succession de divisions euclidiennes permet de calculer le PGCD de deux entiers (PGCD = Plus Grand Commun Diviseur). 4 est le PGCD de 12 et 16, par exemple. Entendez que vous ne trouverez pas de nombre plus grand qui divise à la fois





12 et 16. Autre exemple : on veut calculer le PGCD de 310 et 136. On effectue alors les divisions suivantes :

$$310 = 136 \times 2 + 38$$

$$136 = 38 \times 3 + 22$$

$$38 = 22 \times 1 + 16$$

$$22 = 16 \times 1 + 6$$

$$16 = 6 \times 2 + 4$$

$$6 = 4 \times 1 + 2$$

$$4 = 2 \times 2 + 0$$

Le dernier reste non nul (dans notre exemple, ce dernier reste vaut 2) est le PGCD des deux nombres dont on est parti, 310 et 136. Cette méthode de calcul, facile comme bonjour, a l'avantage de ne pas faire appel à la décomposition des nombres entiers en produits de facteurs premiers. Remarquez que, dans cette colonne d'opérations, chaque reste devient le diviseur de la ligne du dessous, puis le dividende de la ligne suivante. Observez par exemple la trajectoire « diagonale » de 38, puis de 22, puis de 16...

Cette méthode marche aussi pour calculer le PGCD de deux polynômes, et ceci sans utiliser les « polynômes premiers », c'est-à-dire ceux du premier degré. Grâce à elle, nous pouvons effectuer un petit tour de passe-passe. À savoir déterminer si deux polynômes ont, ou n'ont pas, une racine commune, même si l'on n'est pas capable de calculer leurs racines !

Nous pouvons faire mieux encore : trouver le nombre de racines réelles d'un polynôme dans un intervalle quelconque (u, v) sans calculer ces racines ! C'est parfois bien utile, puisqu'on ne dispose pas de formule pour le calcul des racines quand le degré du polynôme est au moins 5, et que les formules pour les degrés 3 et 4 sont de vrais sacs de nœuds. L'énoncé qui

explique comment calculer le nombre des racines d'un polynôme quelconque $P(x)$ dans un intervalle quelconque (u, v) s'appelle le théorème de Sturm. Revoilà Charles-François.

Soit donc $P(x)$ un polynôme. Pour éviter des complications inutiles, supposons que $P(x)$ n'a que des racines simples.

On écrit :

$$P(x) = P_0(x).$$

Ce qui est vrai pour la division des nombres l'est aussi pour la division des polynômes.

QU'EST-CE QUE LE THÉORÈME DE STURM ?

» L'indice 0 est juste là pour indiquer le début de la manip.
On écrit aussi :

$$P'(x) = P_1(x).$$

Un mot sur la notation P' : elle désigne le polynôme dérivé de $P(x)$ (voir encadré ci-dessous).

On calcule alors $P_2(x)$ par la formule :

$$P_0(x) = P_1(x) Q_1(x) - P_2(x),$$

où le degré de $P_2(x)$ est strictement inférieur au degré de $P_1(x)$.
Même chose pour $P_3(x)$:

$$P_1(x) = P_2(x) Q_2(x) - P_3(x)$$

et ainsi de suite.

On effectue donc une suite de divisions euclidiennes (voir en-

LES DÉRIVÉS EN TROIS VERSETS

La valeur d'un polynôme en x , par exemple

$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$,
dépend de la valeur attribuée à x . Ainsi avec $x = 1$,
 $P(1) = 2 + 4 - 3 + 5 = 8$ et $P(0) = 5$.

C'est en utilisant certaines recettes de cuisine qu'on fait « dériver » de $P(x)$ un nouveau polynôme qu'on note $P'(x)$ et qu'on appelle tout simplement la « dérivée » de $P(x)$. Pour la calculer, trois versets puisés dans l'évangile selon saint Matheux devraient suffire.

● Verset 1 : La dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées. On dérivera donc séparément $2x^3$ puis $4x^2$ puis $-3x$ et enfin 5. Il n'y aura plus qu'à faire la somme des résultats.

● Verset 2 : La dérivée d'une constante est nulle. Ainsi la dérivée de 5 est 0.

● Verset 3 : La dérivée de ax^n est égale à anx^{n-1} .

Pas de panique, on se fait vite la main.

Ainsi prenons $2x^3$, on voit bien que $a = 2$ et $n = 3$.

Donc $n - 1 = 3 - 1 = 2$. Alors la dérivée de $2x^3$ est : $2 \times 3x^2 = 6x^2$.

Continuons avec $4x^2$. Ici $a = 4$ et $n = 2$, d'où $n - 1 = 1$.

Donc la dérivée de $4x^2$ est $8x$.

Vient ensuite $-3x$. Cette fois $a = -3$ et $n = 1$, d'où $n - 1 = 0$.

La dérivée de $-3x$ est égale à : $-3 \times 1x^0 = -3$ (car $x^0 = 1$).

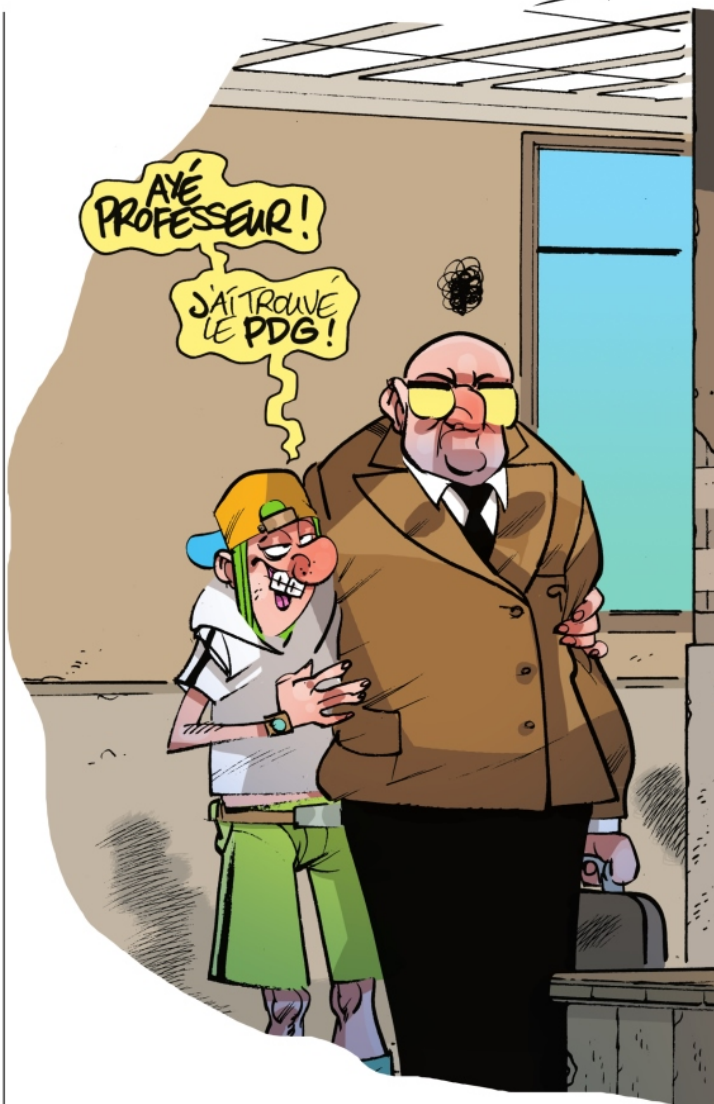
Finalement si $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$, on a : $P'(x) = 6x^2 + 8x - 3$.

Vérifiez que vous avez capté en calculant la dérivée de :

$$P(x) = -5x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x - 12$$

Et remarquez au passage qu'au cours de la dérivation l'exposant diminue de 1.

(Réponse : $P'(x) = -20x^3 - 21x^2 + 4x + 3$.)



cadre page 76), et on s'arrête lorsqu'on obtient un polynôme constant P_n ce qui arrive nécessairement puisque les degrés des polynômes obtenus décroissent à chaque division.

Attention, ça se corse un peu. Maintenant, on considère une suite dite « de Sturm » :

$$S(x) = (P_0(x); P_1(x); P_2(x); \dots; P_n).$$

Puis, pour tout x , on compte le nombre $W(x)$ de changements de



signe dans la suite $S(x)$. Par exemple, si $x = 11$:

$$S(11) = (-2 ; 3 ; 5 ; -13 ; 2 ; 1 ; -3),$$

on aura $W(11) = 4$ puisqu'en lisant cette suite, on « change de signe » quatre fois. Le théorème de Sturm s'énonce à présent ainsi : le nombre de racines de $P(x)$ dans l'intervalle (u, v) est égal à la différence $W(u) - W(v)$.

Nous ne donnerons pas la démonstration, très astucieuse, de

ce résultat. Mais illustrons-le par des exemples. Regardez avec attention le polynôme suivant :

$$P(x) = x^3 + 6x^2 - 16.$$

Utilisons nos notations spéciales :

$$P(x) = P_0(x) \text{ et } P_1(x) = P'(x) = 3x^2 + 12x.$$

Le calcul donne :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= P_1(x) Q_1(x) - P_2(x) \\ x^3 + 6x^2 - 16 &= (3x^2 + 12x)(1/3x + 2/3) - (8x + 16). \end{aligned}$$

Vérifiez : c'est le meilleur moyen de comprendre.

Et on continue :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P_2(x) Q_2(x) - P_3(x) \\ (3x^2 + 12x) &= (8x + 16)(3/8x + 6/8) - 12 \end{aligned}$$

Stop ! $P_3 = 12$, ce polynôme est constant, le calcul s'arrête.

La suite de Sturm de $P(x)$ est donc :

$$\begin{aligned} S(x) &= (P_0(x) ; P_1(x) ; P_2(x) ; \dots ; P_n) \\ S(x) &= (x^3 + 6x^2 - 16 ; 3x^2 + 12x ; 8x + 16 ; 12) \end{aligned}$$

Calculons par exemple $S(-7)$, c'est-à-dire la suite de Sturm pour $x = -7$.

On trouve $S(-7) = (-65 ; 63 ; -40 ; 12)$.

On a trois changements de signe, donc $W(-7) = 3$.

Même chose avec, mettons, 2 : $S(2) = (16 ; 36 ; 32 ; 12)$ et donc $W(2) = 0$.

Puisque $W(-7) - W(2) = 3 - 0 = 3$, le polynôme $P(x) = x^3 + 6x^2 - 16$ a ses trois racines dans l'intervalle $(-7 ; 2)$. Le lecteur pourra d'ailleurs le vérifier, soit en factorisant ce polynôme (qui admet une racine « presque » évidente), soit à l'aide d'un calculateur graphique.

Illustrons la méthode de Sturm par un deuxième exemple. Point de départ, un polynôme bien tordu :

$$P(x) = x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{2} - 18.$$

En calculant, comme dans notre premier exemple, on trouve la suite de Sturm du polynôme $P(x)$, qui est :

$$\begin{aligned} S(x) &= (x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{2} - 18 ; \\ &3x^2 + 6\sqrt{2}x + 3 ; 2x + 2\sqrt{2} + 18 ; -240). \end{aligned}$$

C'est longuet mais pas méchant : ne vous laissez pas impressionner. Cette suite à rallonge va nous permettre de situer une

>>>

QU'EST-CE QUE LE THÉORÈME DE STURM ?

» racine (en fait la racine) de $P(x)$ sur la droite réelle (la droite où l'on range les nombres réels). En effet, on a :

$$S(1) = (2\sqrt{2} - 14 ; 6 + 6\sqrt{2} ; 20 + 2\sqrt{2} ; -240).$$

d'où $W(1) = 2$.

De plus :

$$S(2) = (11\sqrt{2} - 4 ; 15 + 12\sqrt{2} ; 22 + 2\sqrt{2} ; -240)$$

d'où $W(2) = 1$.

On a donc $W(1) - W(2) = 1$.

Le polynôme $P(x)$ a exactement une racine dans l'intervalle $[1 ; 2]$. Nous avons ainsi pu « confiner » la racine de $P(x)$. Si nous voulons l'approcher de plus près, il suffit à présent d'utiliser la méthode de la dichotomie (voir article page 15). Le lecteur qui voudra bien dégainer sa calculette n'aura besoin que de quelques minutes pour voir que la racine x de P est approximativement égale à :

$$x = 1,58578644...$$

Mais Charles-François Sturm fait mieux que jouer les rabatteurs

de racines. Revenons en effet à notre suite abominable :

$$S(x) = (x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{2} - 18 ; 3x^2 + 6\sqrt{2}x + 3 ; 2x + 2\sqrt{2} + 18 ; -240)$$

Enquêter sur TOUTES les racines du polynôme revient à observer toutes les valeurs de x entre $-\infty$ et $+\infty$. Ici, il vous manque peut-être une arme, à savoir : « Lorsque x tend vers l'infini, un polynôme en x tend vers la même limite que son terme de plus haut degré. » En clair, pour savoir vers quelles valeurs va le polynôme :

$$x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{2} - 18,$$

il suffit de s'occuper de x^3 qui est le terme de plus haut degré. Si x tend vers $-\infty$, x^3 tend vers :

$$(-\infty) \times (-\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

Exactement comme pour un nombre ordinaire.

DIVISIONS EUCLIDIENNES

Diviser un polynôme par un autre demande exactement la même méthode que lorsqu'on divise un nombre par un autre.
Exemple : divisez $x^3 - x^2 - 4x - 1$ par $x - 3$.

1 On « pose » l'opération et on dit : « en $x^3 - x^2 - 4x - 1$, combien de fois $x - 3$, ou en x^3 combien de fois x ? ». Il y va x^2 fois : on pose x^2 et on multiplie le diviseur $x - 3$ par x^2 .

2 Cela donne $x^3 - 3x^2$, qu'on écrit sous le dividende.

3 Et on soustrait : $x^3 - x^3 = 0$; $-x^2 - (-3x^2) = 2x^2$.

4 On abaisse le $-4x$ et on dit en $2x^2$ combien de fois x ? Il y va $+2x$ fois qu'on ajoute au quotient.
On multiplie $x - 3$ par $2x$, ce qui donne $2x^2 - 6x$, qu'on retranche de $2x^2 - 4x$. Il reste $2x$ et on abaisse le -1 .

5 En $2x$ combien de fois x ? Il y va 2 fois. On ajoute $+2$ au quotient. $2 \times (x - 3) = 2x - 6$, qu'on retranche de $2x - 1$: il reste 5 et... c'est fini !

$$\text{Conclusion : } \begin{array}{ccccccc} x^3 - x^2 - 4x - 1 & = & (x - 3)(x^2 + 2x + 2) & + & 5 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A(x) & & B(x) & & Q(x) & & R \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 4x - 1 \quad | \quad x - 3 \\ \underline{-x^3} \\ x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 4x - 1 \quad | \quad x - 3 \\ \underline{-x^3 + 3x^2} \\ 0 + 2x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 4x - 1 \quad | \quad x - 3 \\ \underline{-x^3 + 3x^2} \\ 2x^2 - 4x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 4x - 1 \quad | \quad x - 3 \\ \underline{-x^3 + 3x^2} \\ 2x^2 - 4x \\ \underline{-2x^2 + 6x} \\ 2x - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 4x - 1 \quad | \quad x - 3 \\ \underline{-x^3 + 3x^2} \\ 2x^2 - 4x \\ \underline{-2x^2 + 6x} \\ 2x - 1 \\ \underline{-2x + 6} \\ 5 \end{array}$$



Le théorème de Sturm
donne le nombre de
racines réelles
du polynôme.

QU'EST-CE QUE LE THÉOREME DE STURM ?



Même procédure pour le second terme de la suite :

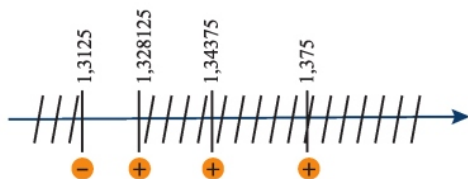
$$3x^2 + 6\sqrt{2}x + 3.$$

Il tend vers $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$. Le troisième terme, $2x + 2\sqrt{2} + 18$, tend vers $-\infty$; le quatrième, -240 , est constant. Comptons les changements de signes : $W(x) = 2$.

Même démarche si x' tend vers $+\infty$. Vous trouvez $W(x') = 1$. Il s'ensuit que $W(x) - W(x') = 2 - 1 = 1$, et donc que $P(x)$ a, en tout et pour tout, une seule racine réelle !

On peut procéder de la même manière pour n'importe quel polynôme. À chaque fois, la suite de Sturm vous donnera une information globale très importante : le nombre de racines réelles du polynôme.

Vous avez compris ? Bravo ! Attaquez-vous à l'exercice suivant : montrer que l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ a une unique racine réelle et calculer une approximation à 0,01 près de cette racine. Indications : c'est par dichotomie que vous trouverez une bonne approximation de la racine (voir article page 15). Examinez en premier l'intervalle de 0 à 2.



SOLUTIONS

Posons $P(x) = x^3 - x - 1$. En respectant les notations de l'article on écrit alors $P_0(x) = x^3 - x - 1$ et on calcule $P_1(x) = P'(x) = 3x^2 - 1$. Il faut alors trouver $P_2(x)$ tel que : $P_0(x) = P_1(x)Q_1(x) - P_2(x)$.

Pour cela, on doit diviser $P_0(x) = x^3 - x - 1$ par : $P_1(x) = 3x^2 - 1$.

$$\begin{array}{r} x^3 - x - 1 \\ - (x^3 - \frac{1}{3}x) \\ \hline -\frac{2}{3}x - 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3x^2 - 1 \\ \frac{1}{3}x \\ \hline \end{array}$$

On trouve $R_1 = -\frac{2}{3}x - 1$ d'où :

$$-R_1 = P_2(x) = \frac{2}{3}x + 1.$$

On peut vérifier qu'on a bien :

$$x^3 - x - 1 = (3x^2 - 1)\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x - 1.$$

Nous cherchons maintenant $P_3(x)$ tel que :

$$P_1(x) = P_2(x)Q_2(x) - P_3(x).$$

Donc on divise

$$P_1(x) = 3x^2 - 1$$

$$\text{par } P_2(x) = \frac{2}{3}x + 1.$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 1 \\ - (2x + \frac{9}{2}) \\ \hline -\frac{9}{2}x - 1 \\ - (-\frac{9}{2}x - \frac{27}{4}) \\ \hline \frac{23}{4} \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{2}{3}x + 1 \\ \frac{9}{2}x - \frac{27}{4} \\ \hline \end{array}$$

On trouve $R_2 = -P_3(x) = \frac{23}{4}$

$$\text{d'où : } P_3(x) = -\frac{23}{4}.$$

On peut vérifier que :

$$3x^2 - 1 = \left(\frac{2}{3}x + 1\right)\left(\frac{9}{2}x - \frac{27}{4}\right) + \frac{23}{4}$$

Le jeu des divisions cesse ici puisque $P_3(x)$ est une constante.

Écrivons la suite de Sturm : $S_{(x)} = (P_0; P_1; P_2; P_3)$

Soit :

$$S_{(x)} = \left(x^3 - x - 1; 3x^2 - 1; -\frac{2}{3}x - 1; -\frac{23}{4}\right)$$

Écrivons les suites pour x tend vers $-\infty$ puis $+\infty$:

$$S_{(-\infty)} = \left(-\infty; +\infty; -\infty; -\frac{23}{4}\right) \text{ d'où } W_{(-\infty)} = 2$$

$$S_{(+\infty)} = \left(+\infty; +\infty; -\infty; -\frac{23}{4}\right) \text{ d'où } W_{(+\infty)} = 1$$

Le nombre total de racines est donné par

$$W_{(-\infty)} - W_{(+\infty)} = 2 - 1 = 1 : \text{il y a une et une seule racine.}$$

Calculons $P_{(0)} = -1$ (négatif) et $P_{(2)} = 5$ (positif). Cette racine est comprise entre 0 et 2. Poursuivons la dichotomie et plaçons les derniers résultats sur la flèche (ci-contre à gauche) :

$$P(1) = 1 - 1 - 1 = -1 \text{ donc racine entre 1 et 2}$$

$$P(1,5) = +0,875$$

$$P(1,375) = +0,2246$$

$$P(1,34375) = +0,0826$$

$$P(1,25) = -0,297$$

$$P(1,3125) = -0,04$$

$$P(1,328125) = +0,0146$$

Conclusion : cette racine est comprise entre 1,31 et 1,33. On est bien à 0,01 près.



COMMENT A-T-ON BASCULÉ DANS L'IMAGINAIRE?

En poussant à fond les équations du second degré, les mathématiciens ont découvert de nouveaux mondes étranges, où les racines et les carrés deviennent négatifs et où l'imaginaire trouve sa place dans les formules. Exploration de l'univers des nombres complexes.

JONAS LÉVY



Voici une étrange histoire. Elle raconte la découverte de rivages exotiques, d'un monde totalement inconnu, presque effrayant, et démarre dans l'Italie de la Renaissance... Eh non, il ne s'agit pas de la découverte des Amériques, des légendes et des peurs que l'Italien Christophe Colomb dut surmonter pour voguer sur le Grand Océan. L'Italien de notre histoire s'appelle Jérôme Cardan ; il n'est pas de Gênes, comme Colomb, mais de Padoue. Et, surtout, il n'a pas besoin de caravelles et d'or pour découvrir un nouvel univers. Une table, une chaise, du papier et une plume lui suffisent : Cardan est mathématicien.

À vrai dire, Cardan n'a fait qu'apercevoir les nouveaux rivages : il en a même éprouvé une telle frousse qu'il a fait machine arrière. L'exploration de ce monde neuf s'est étalée sur trois siècles, menée par de très grands mathématiciens comme Bombelli, Leibniz, Euler, Argand, Gauss... Peu importe le détail historique : voici comment les choses auraient pu se passer. Notre histoire n'a qu'un personnage, fictif. Appelons-le le Découvreur. Son point de départ est un problème qui semble de prime abord bête à pleurer. Trouvez deux nombres m et n dont la somme est 10 et le produit 40. Le Découvreur hausse les épaules et écrit :

$$S = m + n = 10 \text{ et } P = mn = 40.$$

Le bon sens crie au Découvreur : avant de te lancer vers un Nouveau Monde, utilise ce que l'Ancien te donne. En d'autres termes, vois si la bonne vieille équation du second degré fait avancer les choses. La « boîte à outils » du matheux donne une piste qui semble solide (voir article page 53) : « deux nombres réels dont la somme est S et le produit P sont, s'ils existent, les racines de l'équation du second degré $X^2 - SX + P = 0$ ».

On connaît S , on connaît P , remplaçons :

$$X^2 - 10X + 40 = 0.$$

La routine impose de calculer le discriminant :

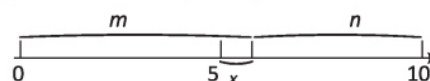
$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 160 = -60.$$

Aïe : l'exploration aboutit à une impasse. Si Δ est négatif, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels, ceux qui forment l'Ancien Monde. Mais ces deux nombres m et n doivent bien exister puisqu'ils se marient dans une somme et un produit !

Qui a déjà vu un carré négatif ? Personne. On nage dans l'absurde.

Que faire ? Tout l'art du Découvreur est là : il faut tenter de contourner l'obstacle par des chemins de traverse. Visiblement, le problème entier nous dépasse. N'en regardons que la moitié, à savoir la somme $S = m + n = 10$. Évidemment il y a une infinité de solutions. Tiens, $5 + 5 = 10$, par exemple. Mais, attendez, pourquoi introduire ce cas particulier ? Pourquoi se bloquer sur une solution si spéciale, à savoir m et n égaux ? Faisons machine arrière et, au contraire, EXCLUONS le fait de se limiter à cette solution.

Un coup d'œil au schéma pour capter l'astuce :



Les deux nombres que nous cherchons peuvent dorénavant s'écrire : $m = 5 + x$ et $n = 5 - x$.

C'est maintenant le seul nombre x que nous cherchons. Exécutons le produit P avec ces deux créatures :

$$P = mn = (5 + x)(5 - x) = 40.$$

Développons : $25 + 5x - 5x - x^2 = 40$,

qui conduit droit à : $x^2 = -15$.

Le Découvreur est effaré. Dans son chemin de traverse, il tombe sur une sorte de monstre ! Qui a déjà vu un carré négatif ? Personne. On nage dans l'absurde, le Découvreur a un instant de découragement.

À moins que... Mais non, ça ne mènera nulle part... Allez, essayons quand même. Qui nous empêche d'écrire $x^2 = -15$ sous la forme :

$$x^2 = (-1) \times 15 ?$$

Personne, puisque c'est correct. Et pour trouver x , extrayons la racine carrée :

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{15} \sqrt{-1}, \text{ soit } x = \sqrt{15} \sqrt{-1}.$$

Diabole, encore un épouvantail, ce $\sqrt{-1}$. Ce Nouveau Monde est plein de créatures démoniaques. Allez, continuons. Posons :

$$m = 5 + x = 5 + \sqrt{15} \sqrt{-1}$$

$$\text{et } n = 5 - x = 5 - \sqrt{15} \sqrt{-1}.$$

Et additionnons :

$$S = m + n = 5 + \sqrt{15} \sqrt{-1} + 5 - \sqrt{15} \sqrt{-1}.$$

Ça fait 10 ! Nous retombons sur nos pattes. Et si, par hasard... Allons-y pour le produit :

$$P = mn = (5 + \sqrt{15} \sqrt{-1})(5 - \sqrt{15} \sqrt{-1}).$$



$$P = 5 \times 5 + 5\sqrt{15}\sqrt{-1} - 5\sqrt{15}\sqrt{-1} - \sqrt{15}\sqrt{-1} \times \sqrt{15}\sqrt{-1}$$

$$P = 25 - (\sqrt{15})^2 \times (\sqrt{-1})^2 = 25 - 15 \times (-1)$$

$$= 25 + 15 = 40.$$

Donc m et n existent bien ! Ils sont bizarres, mais ce sont des nombres ! Rendons-les plus présentables en posant :

$$\sqrt{-1} = i \text{ ou encore } i^2 = -1.$$

i ? Oui, i comme *imaginaire*. Car nos Découvreurs des XVI^e, XVII^e et XVIII^e siècles ont été effarés par ce nombre exotique, ce $\sqrt{-1}$. Ils ont eu un mal fou à le traiter comme les autres nombres, les nombres réels. À leurs yeux, il devait venir d'une autre planète,

celle de la fantaisie mathématique, bref de l'imaginaire. Mais le Nouveau Monde nous appelle. Continuons.

m et n peuvent s'écrire :

$$m = 5 + \sqrt{15} \times i \text{ et } n = 5 - \sqrt{15} \times i.$$

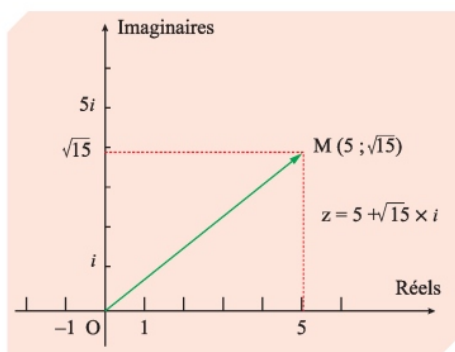
Essayons de leur trouver une place dans notre Ancien Monde, celui des nombres réels. Un monde simple, en forme de droite, où tous les nombres se posent les uns derrière les autres comme des hirondelles sur un fil. -2 ; $-1,8$; 0 ; 1 ; $2,9$; $8,33$; etc. Où placer nos deux créatures m et n ? Regardons de près leur anatomie :

$$m = 5 + \sqrt{15} \times i \text{ et } n = 5 - \sqrt{15} \times i.$$

»»

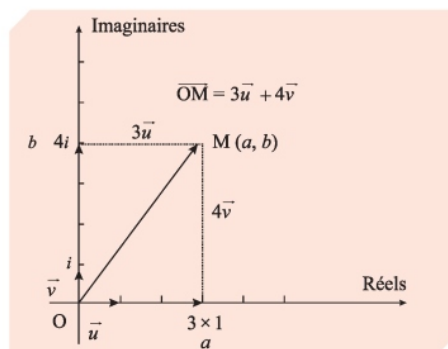
COMMENT A-T-ON BASCULÉ DANS L'IMAGINAIRE ?

» N'ont-elles pas un petit air de sphinx, de dieu Anubis, bref de créatures à deux faces ? La découverte du Nouveau Monde a en effet accouché de monstres thérianthropes. La partie humaine, « réelle », c'est le 5 ; la partie fantastique, « imaginaire », c'est le $\sqrt{15}$. Ces bestioles de contes de fées ne peuvent pas tenir entières sur notre droite des réels. Seule leur partie réelle va y prendre place. Et quant à leur partie imaginaire, il faut la situer dans les cieux, dans une nouvelle dimension : un second axe (voir ci-dessous). Ces êtres hybrides, les mathématiciens ont fini par les appeler les nombres complexes.



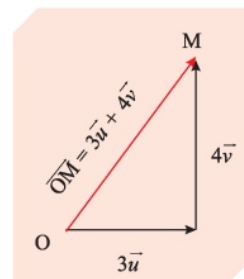
> Coucou, revoilà le second degré <

Les nombres complexes vivent donc dans un monde à deux dimensions. Les mathématiciens, gens de convention, ont pris l'habitude de poser les complexes sur un plan muni d'un système d'axes doté de repères :



O, à l'intersection des deux axes,
 $\vec{u}$ sur l'horizontale et $\vec{v}$ sur la verticale.

La flèche posée sur u et v indique qu'il s'agit de **vecteurs**. Pour additionner deux vecteurs, il suffit de tracer le second à la suite du premier (voir ci-contre).



Les multiples de i , des nombres imaginaires purs, seront associés aux points de l'axe $(O; \vec{v})$, appelé axe imaginaire, et les nombres réels à ceux de l'axe $(O; \vec{u})$, appelé axe réel. Ainsi donc, au nombre complexe $z = a + bi$, correspond le point M du plan, de coordonnées (a, b) , ou le vecteur $\vec{OM}(a, b)$.

Prenons un exemple :

$$\vec{OM} = 3\vec{u} + 4\vec{v}$$

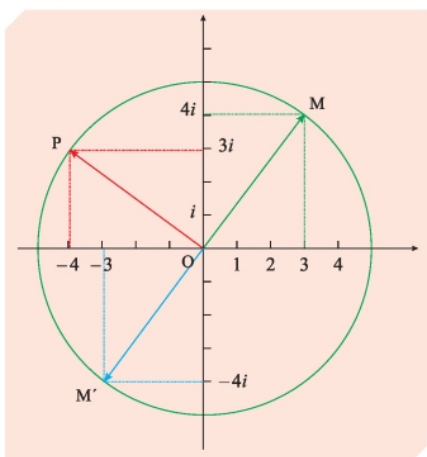
Ce vecteur est associé au nombre complexe $z = 3 + 4i$. La multiplication par -1 du vecteur $\vec{OM}$ consiste purement et simplement à le retourner : même direction et même longueur mais sens contraire. C'est le vecteur $\vec{OM}'$ du dessin qui est associé au »



MOI PAS
ALLER PLUS LOIN
PROFESSEUR!!!

ICI COMMENCE
LE TERRITOIRE
DES CARRÉS
NÉGATIFS!!!

» nombre complexe : $z' = z \times (-1) = (3 + 4i)(-1) = -3 - 4i$ (voir ci-dessous).



Le Découvreur sent qu'il tient quelque chose de neuf.

Que se passe-t-il si l'on multiplie le complexe $z = a + bi$ par i ? Voyons : $z_1 = z \times i = (a + bi) \times i = ai + bi^2$.

Or, i^2 étant égal à -1 , il vient : $z_1 = ai - b = -b + ai$.

Soit avec les valeurs de l'exemple :

$$z_1 = -4 + 3i \text{ associé au vecteur } \vec{OP}.$$

Le Découvreur est ravi. Ce pays qu'il explore contient des merveilles : la multiplication par i d'un nombre complexe a une signification géométrique. La multiplication par i du nombre complexe z a provoqué la rotation d'un quart de tour du vecteur associé $\vec{OM}$ qui devient $\vec{OP}$.

Lien nouveau et magique entre la géométrie et ces nombres que notre aventurier veut confirmer. Pour cela il applique la même opération au nombre z_1 , et bien entendu il voit le vecteur tourner à nouveau de 90° .

$\vec{OP}$ devient $\vec{OM'}$:

$$z_1 \times i = (-b + ai) \times i = -bi + ai^2 = -a - bi = -(a + bi) = -z.$$

En résumé : nouvelle multiplication par i égale nouveau quart de tour. Quart de tour plus quart de tour égale demi-tour : la multiplication par $i^2 = -1$ conduit bien du vecteur $\vec{OM}$ au vecteur $\vec{OM'}$ qui lui est opposé. Ce qui donne son plein sens à la célèbre égalité $i^2 = -1$.

Mais une autre merveille attendait le Découvreur. Puisque, par exemple, l'équation $x^2 = -4$ a deux solutions complexes, $x = 2i$ et $x = -2i$, ne peut-on pas ainsi résoudre toutes les équations du



second degré ?

Eh bien si ! Et c'est beaucoup moins ardu qu'on pourrait le croire. Une équation du second degré est du type $ax^2 + bx + c = 0$ et se résout par la méthode traditionnelle. Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, il n'y a rien de changé, on utilise les bonnes vieilles formules (voir page 7). Et si $\Delta < 0$? Alors, grâce à notre i^2 venu d'ailleurs... le Découvreur osera-t-il ?

Il ose et peut alors écrire :

$$\Delta = (-\Delta) i^2 \text{ ou } \Delta = (i\sqrt{-\Delta})^2.$$

Donc il existe deux nombres dont le carré est égal à Δ . Ce sont :

$$i\sqrt{-\Delta} \text{ et } -i\sqrt{-\Delta},$$

puisque avec $\Delta < 0$, on a $-\Delta > 0$.

On peut dès lors extraire la racine carrée de $-\Delta$ et les formules habituelles donnent alors deux solutions qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

C'est ainsi que le Découvreur a annexé un nouveau monde à l'empire des mathématiques. Il ne vous en dira pas plus sur les nombres complexes. Mais sachez une chose : ce qui à l'origine n'était qu'une fantaisie mathématique a trouvé une foultitude d'applications. Notamment en physique où tout ce qui vibre a besoin des complexes : électricité, ondes radio et télé, physique des particules, vibrations acoustiques, etc. Le Découvreur en reste bouche bée : la réalité est racontée au moyen de l'imaginaire ! ■



CONNAISSEZ-VOUS LA FAMILLE DES CONIQUES?

Ellipses, paraboles, hyperboles ou cols de montagne, toutes ces formes qui emplissent la nature sont filles du second degré. On les scrutait déjà il y a trois mille ans !

Et les ingénieurs les adorent.

Promenade dans une galerie d'art géométrique.

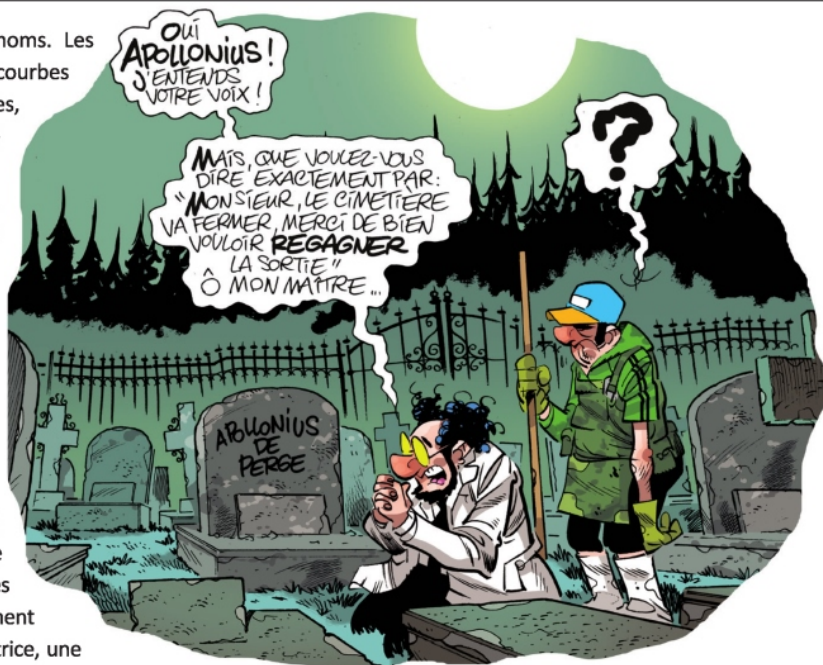
JEAN-PIERRE BOUDINE



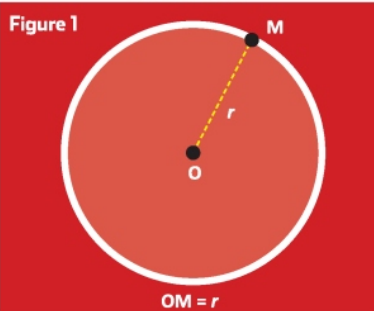
On leur a donné toutes sortes de noms. Les algébristes modernes les appellent « courbes de degré deux ». Jamais à court d'idées, René Descartes (le philosophe du « je pense donc je suis ») les a associées vers 1650 à une équation en x et y ; et il les a inscrites dans un cadre de coordonnées qui portent son patronyme (voir encadré page 89). Mais le vieux nom de ces courbes-là remonte à 400 ans avant J.-C. Des mathématiciens grecs bien oubliés comme Ménechme, Hippocrate de Chios et surtout Apollonius de Perge s'adressaient à elles avec respect en les appelant : « coniques ». Comment les connaissaient-ils ?

En se branchant sur l'art des architectes. Les constructeurs de temples, pyramides, basiliques et autres mausolées étaient des virtuoses de la règle et du compas. Ils tâchaient de tout faire avec et les mathématiciens les ont imités. Par exemple, comment construire « à la règle et au compas » une médiatrice, une bissectrice, un hexagone, un pentagone régulier... De même, comment bâtir un nombre φ tel qu'en lui retirant 1, on obtienne son inverse : c'est le fameux nombre d'or (voir problème n° 6, page 43). Ou encore, construire le côté d'un carré dont la surface sera le double de celle d'un carré donné.

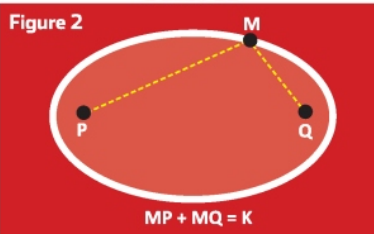
Tous ces problèmes bien connus peuvent être résolus à la règle et au compas. Mais d'autres, avec ces seuls instruments, sont carrément insolubles. C'est le cas de la duplication du cube (voir encadré page 88), vieux serpent de mer des maths. Ne parvenant pas à trouver la solution « à la règle et au compas », les anciens Grecs, en particulier Ménechme et Hippocrate de Chios, se sont tournés vers d'autres moyens. C'est ainsi qu'ils ont rencontré des courbes telles que l'hyperbole, la parabole ou l'ellipse. Ils connaissaient ce que nous appelons les « définitions métriques » de ces courbes, qui sont, en gros, leurs définitions géométriques. Et vous, les connaissez-vous ?



LE CERCLE



L'ELLIPSE



> Cercle, ellipse, hyperbole... une grande famille <

Le plus simple d'abord. Prenez un point O et un nombre positif r . L'ensemble des points M du plan dont la distance à O vaut r , c'est le cercle de centre O et de rayon r (voir figure 1).

Donnez-vous maintenant deux points P et Q et un nombre K plus grand que la distance PQ . L'ensemble des points M du plan dont la somme des distances à P et Q (soit $MP + MQ$) vaut K est une ellipse dont P et Q sont les foyers (voir figure 2). Faites fusionner les deux foyers, et votre ellipse redevient cercle.

Gardez les deux points P et Q mais cherchez les points du plan dont la différence (et non la somme) des distances à P et Q vaut K : vous obtenez une hyperbole (voir figure 3).

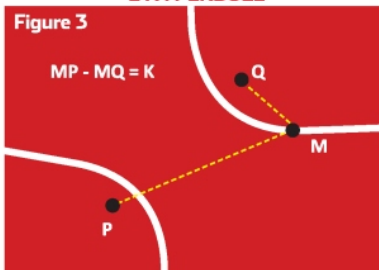
Considérez enfin un point F et une droite (d) et cherchez l'ensemble des points M du plan qui sont à égale distance de F et (d) : c'est une parabole (voir figure 4, ainsi que l'article page 47).

Mais tout cela ne nous dit pas pourquoi ce nom : CONIQUES ? La plus belle découverte dans cette histoire est attribuée au célèbre Apollonius de Perge (vers 270 av. J.-C.). À partir d'un plan et d'un cône, il réussit à démontrer que cercle, ellipse, parabole et hyperbole sont les rejetons d'une même famille.

Entendons-nous d'abord sur le vocabulaire. Pour avoir un cône, il faut un point S, son sommet (voir figure 5). Ensuite une directrice : ici, ce sera un cercle. Pour que le cône puisse être dit « droit », il faut que S soit un point de la perpendiculaire au plan du cercle, passant par son centre O : cette droite est l'axe du

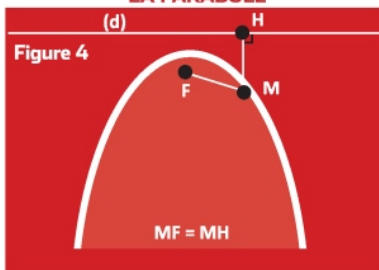
L'HYPERBOLE

Figure 3



LA PARABOLE

Figure 4



cône. Autrement dit, si vous projetez orthogonalement S sur le plan du cercle, vous tombez pile sur son centre. Maintenant joignez S à un point quelconque du cercle et prolongez : cette droite est une génératrice du cône. Le cône est précisément l'ensemble des points de l'espace qui appartiennent à ces génératrices.

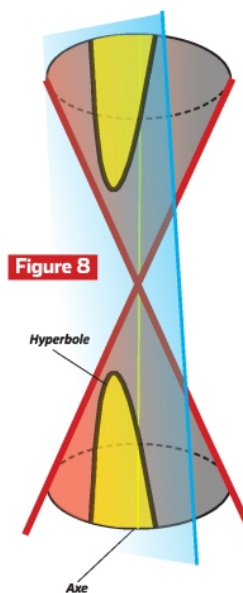
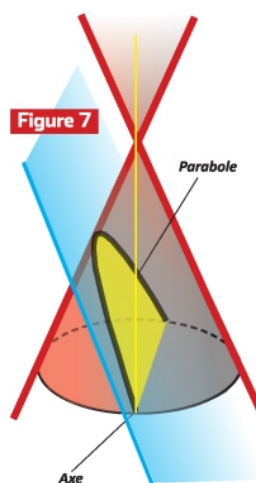
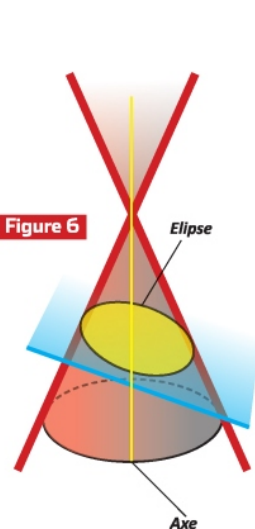
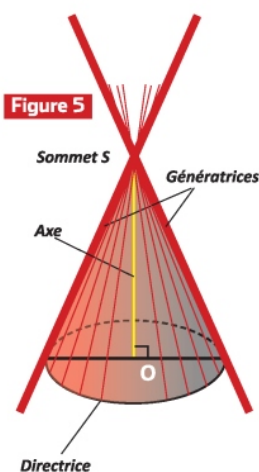
Maintenant, examinons les différentes façons de « trancher » un cône avec un plan.

Figure 6 : vous coupez le cône avec un plan qui rencontre toutes les génératrices. L'intersection est une ellipse. Dans le cas où le plan est perpendiculaire à l'axe du cône, c'est même un cercle.

Figure 7 : le plan est parallèle à une génératrice. C'est comme si l'ellipse s'était indéfiniment allongée, jusqu'à se « casser » : on a une parabole.

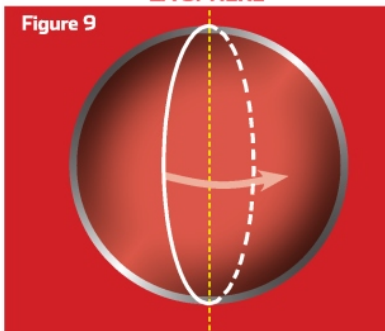
Figure 8 : inclinez encore le plan, il rencontrera les deux nappes du cône (= les deux parties opposées par le sommet) et l'intersection sera une hyperbole. Sur la figure, le plan est parallèle à l'axe du cône.

Les coniques sont une famille de courbes planes, mais on peut les enrichir tant et si bien qu'elles se mettent à vivre dans l'espace, en 3 D, prenant alors le nom de « quadriques ». Lesquelles sont



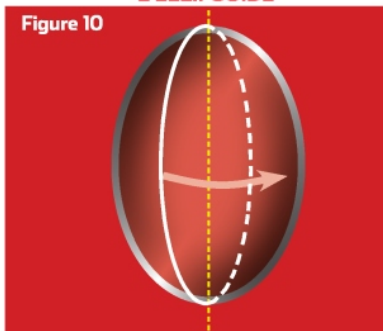
LA SPHÈRE

Figure 9



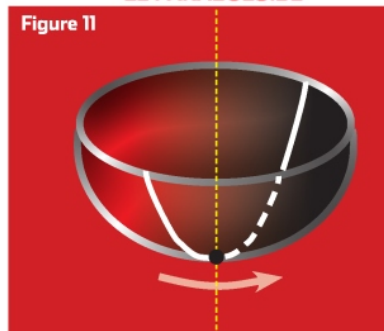
L'ELLIPSOÏDE

Figure 10



LE PARABOLOÏDE

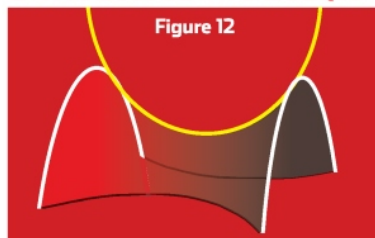
Figure 11



» tout simplement des courbes du second degré en x , y ,... et z . Comment les créer ? Par révolution, d'abord. Comme le potier qui fait tourner un plateau en utilisant sa main pour créer des formes, faites tourner un cercle autour de son diamètre : vous avez une sphère (voir figure 9). Faites tourner une ellipse autour de son grand axe, vous fabriquez un ellipsoïde, forme approchée d'un ballon de rugby (voir figure 10). Faites tourner une parabole autour de son axe,

LA PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE

Figure 12



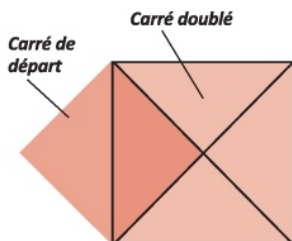
DUPLICATION DU CUBE

Passer du carré au cube, c'est passer de la surface au volume. Doubler un carré, c'est construire un carré de surface double. Doubler un cube, c'est construire un cube de volume double. La duplication du carré ne consiste pas à construire un carré de côté double. Celui-ci aurait en effet une surface multipliée par quatre. La solution « à la règle et au compas » est pourtant chose simple (voir figure ci-dessous). La duplication du cube ne se fait pas non plus en doublant le côté, ce qui multiplierait le volume par huit (voir figure ci-contre). L'étroite parenté entre carré et cube fait qu'on a longtemps cherché une solution géométrique « du même

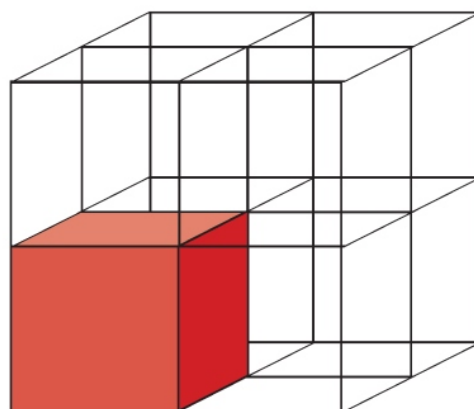
genre » pour doubler le cube... sans succès pendant plus de vingt siècles.

Avec la quadrature du cercle et la trisection de l'angle, la duplication du cube fait partie des problèmes de géométrie, célèbres depuis Hippocrate de Chios au v^e siècle avant J.-C., et

impossibles à résoudre avec la règle et le compas. Ce qui n'a été démontré qu'au xix^e siècle.



« L'unité de compte » est le triangle



Un cube dont on a doublé le côté devient 8 fois plus volumineux

et voilà un paraboloïde ; d'où l'on a tiré les antennes dites paraboliques, les miroirs des télescopes ou encore les cavités métallisées des phares de voitures (voir figure 11).

Au fond, tout ceci consiste à marier la parabole et le cercle. Il existe un mélange plus excitant : celui de la parabole et de l'hyperbole, le paraboloïde hyperbolique ! On dirait une selle de cheval, mais illimitée. La zone que montre la figure 12 ci-contre se rencontre en... montagne : c'est simplement un col. ■



CONIQUES ET SECOND DEGRÉ, MÊME COMBAT

Une expression algébrique de degré deux en la variable x , soit :

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

peut, dans un système d'axes appropriés, vous permettre de tracer une parabole. Dans ce cas, vous déciderez que x est l'abscisse et l'ordonnée y du point d'abscisse x sera :

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

On peut écrire cette équation :

$$ax^2 - y + bx + c = 0,$$

et la considérer comme une équation en deux variables, x et y . On dira alors qu'elle est de degré 2, car 2 est le degré du monôme... de degré le plus élevé (et c'est ax^2).

Mais, par exemple, $x + y^2 + y + 1 = 0$ (monôme de degré le plus élevé : y^2) sera aussi une équation (en x et y) du second degré.

Et $xy + x - 1 = 0$ aussi, car le monôme xy est de degré 1 en x et 1 en y , donc 2 au total.

Toutes ces possibilités, et quelques autres, sont des cas particuliers de l'équation de degré deux la plus générale :

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Pour certains choix des lettres (on dit « coefficients ») a, b, c, d, e, f , vous obtenez d'autres courbes connues (voir figures ci-contre).

Par exemple :

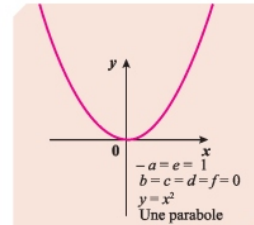
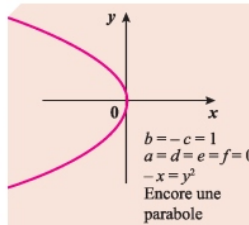
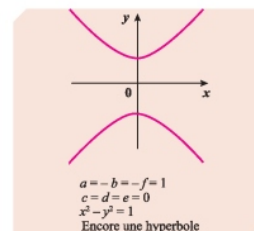
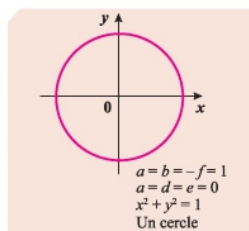
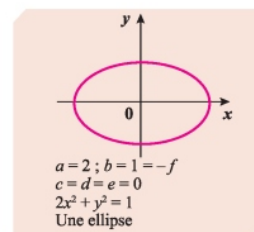
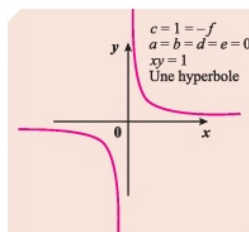
$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \text{ est un cercle ;}$$

$$y^2 - x + 6 = 0 \text{ est une autre parabole ;}$$

$$x^2 + 3y^2 - 3 = 0 \text{ est une ellipse ;}$$

$$xy - 3 = 0 \text{ est une hyperbole.}$$

Toutes les courbes que l'on peut obtenir de cette manière sont appelées « courbes de degré deux ». La famille des coniques au sens (géométrique) d'Apollonius de Perge et la famille moderne (algébrique) des « courbes de degré deux » sont une seule et même chose.



Vous avez bien creusé, bûché, phosphoré ? Sérieusement ? Alors – et seulement alors – vous avez le droit de lire ce qui suit.

MICHEL DENGREVILLE et ROGER CUCULIÈRE

LES PAS DURS

1 Mise en jambes

Avez-vous remarqué que l'énoncé ne précise pas dans quel ensemble de nombres on cherche des solutions ?

● 1) Première équation

On calcule son discriminant réduit (voir article page 53) :

$$\Delta' = 4 + 3 = 7.$$

Donc cette équation admet deux solutions réelles :

$$x' = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3} \text{ et } x'' = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}.$$

● 2) Deuxième équation

On calcule son discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 7 = -55.$$

Ce discriminant est négatif donc cette équation n'a pas de racines réelles. Ce qui n'empêche pas de se demander si elle a des racines complexes (voir article page 79), et de trouver :

$$\Delta = (-1)55 = i^2 55 = (i\sqrt{55})^2$$

d'où :

$$x' = \frac{1 - i\sqrt{55}}{4} \text{ et } x'' = \frac{1 + i\sqrt{55}}{4}.$$

● 3) Troisième équation

Elle a la forme d'un carré parfait et peut s'écrire :

$$(2x - 3)^2 = 0.$$

Elle possède donc une racine double évidente :

$$x' = x'' = \frac{3}{2}.$$

Nombres dont on connaît la somme S et le produit P :

On sait que ces deux nombres, s'ils existent, sont solutions de l'équation (voir article page 53) :

$$X^2 - SX + P = 0.$$

● 4) $S = 19$ et $P = 78$, d'où l'équation :

$$X^2 - 19X + 78 = 0.$$

On calcule son discriminant :

$$\Delta = (-19)^2 - 4 \times 1 \times 78 = 49 = 7^2.$$

Les solutions sont $\frac{19 \pm 7}{2}$, soit 13 et 6.

Effectivement : $13 + 6 = 19$ et $13 \times 6 = 78$.

● 5) $S = 12$ et $P = 205$, d'où l'équation :

$$X^2 - 12X + 205 = 0.$$

On calcule son discriminant réduit :

$$\Delta' = 6^2 - 205 = -169.$$

Donc cette équation n'a pas de solutions réelles ce qui signifie qu'il n'existe pas de nombres réels

dont la somme est 12 et le produit 205. Ce qui n'interdit pas de chercher s'il existe des solutions complexes (voir article page 79).

$$\Delta' = (-1)13^2 = i^2 13^2, \text{ soit } \sqrt{\Delta'} = 13i;$$

d'où :

$$x' = 6 - 13i \text{ et } x'' = 6 + 13i.$$

3 Une maison de maçon

Posons $x + y = P$ (on raisonne sur le demi-périmètre).

Nous savons que $xy = 100$.

Si x et y existent, ils sont solution de l'équation

$$X^2 - PX + 100 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = P^2 - 400$, or nous savons que pour posséder des solutions réelles, il est nécessaire d'avoir $\Delta \geq 0$, donc $P^2 \geq 400$. La plus petite valeur possible de P est atteinte lorsque $P^2 = 400$.

Mais alors $\Delta = 0$, l'équation admet une racine double ce qui signifie que $x = y = 10$.

C'est un carré. Ce résultat est général : de tous les rectangles ayant une surface donnée, celui qui a le plus petit périmètre est le carré ; de tous les rectangles ayant un périmètre donné, celui qui a la plus grande surface est encore le carré.

2 Aux abris, voilà m !

● 1) Le discriminant est :

$$\Delta = m^2 - 4(3m - 5) = m^2 - 12m + 20.$$

On doit donc étudier le signe de ce trinôme en m .

Le discriminant réduit du discriminant (voir article page 53) est :

$$\delta' = 36 - 20 = 16 = 4^2,$$

et ses racines sont données par $m = 6 \pm 4$, soit :

$$m' = 2 \text{ et } m'' = 10.$$

Les racines existent pour $\Delta \geq 0$, c'est-à-dire pour $m \leq 2$ ou $m \geq 10$.

Pour $m = 2$, racine double 1. Pour $m = 10$, racine double 5.

● 2) Pour $m \leq 2$ ou $m \geq 10$, on a :

$$\Delta \geq 0 \text{ et } S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = m$$

$$\text{soit } m = S \text{ et } P = x'x'' = \frac{c}{a} = 3m - 5.$$

$$\text{Alors } P = 3S - 5.$$

$$\text{Donc } P + 5 = 3S.$$

$$\text{Soit } x'x'' + 5 = 3(x' + x'').$$



4 Le bateau ivre

Soit v la vitesse propre du bateau en km/h. À la descente, la vitesse du bateau est $v + 2,5$ et à la remontée $v - 2,5$. L'énoncé nous dit que le voyage dure 4 heures ; donc il nous faut raisonner sur la durée.

$$\text{De } v = \frac{d}{t}, \text{ on tire } t = \frac{d}{v}.$$

Le temps mis pour descendre la rivière est :

$$t_1 = \frac{30}{v+2,5};$$

celui pour la remonter est :

$$t_2 = \frac{12}{v-2,5}.$$

D'où l'équation :

$$t_1 + t_2 = 4 = \frac{30}{v+2,5} + \frac{12}{v-2,5}.$$

$$4(v+2,5)(v-2,5) = 30(v-2,5) + 12(v+2,5)$$

$$4(v^2 - 2,5^2) = 42v - 45$$

enfin :

$$4v^2 - 42v + 20 = 0.$$

On trouve :

$$\Delta' = 441 - 80 = 361 = 19^2.$$

$$\text{D'où } v = \frac{21 \pm 19}{4}, \text{ soit } v' = 10 \text{ ou } v'' = 0,5.$$

La solution $v'' = 0,5$ est inacceptable puisque le bateau ne pourrait pas remonter le courant.

Conclusion : la vitesse du bateau est de 10 km/h.

5 La qualité, ça se paie

Désignons par x le nombre de pièces achetées et p le prix d'une pièce.

On peut écrire :

$$432 = xp \text{ et } 432 = (x-2)(p+3).$$

Ce qui donne :

$$(x-2)(p+3) = xp;$$

en développant :

$$xp - 2p + 3x - 6 = xp;$$

et en simplifiant :

$$3x - 2p - 6 = 0.$$

$$\text{Or, } p = \frac{432}{x}, \text{ on trouve :}$$

$$3x - \frac{864}{x} - 6 = 0;$$

qui donne en multipliant par x :

$$3x^2 - 6x - 864 = 0.$$

Et enfin :

$$x^2 - 2x - 288 = 0,$$

dont $\Delta' = 1 + 288 = 289 = 17^2$.

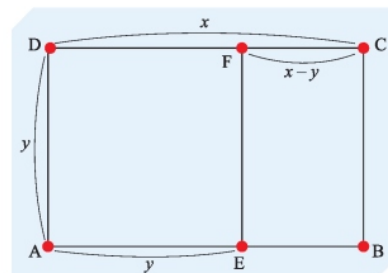
Ce qui conduit aux solutions $x' = 18$ et $x'' = -16$.

La solution acceptable est 18.

Conclusion : le nombre de pièces achetées est de 18 ; le prix d'une pièce est de 24 euros, car :

$$\frac{432}{18} = 24.$$

6 Le nombre d'or



$$\varphi = \frac{x}{y}$$

La relation de définition est $\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}$, que l'on peut écrire :

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{x}{y} - 1}.$$

$$\text{D'où } \varphi = \frac{1}{\varphi - 1} \text{ et } \varphi^2 - \varphi = 1.$$

Donc φ est la solution positive (rapport de deux longueurs) de l'équation $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

$$\Delta = 1 + 4 = 5, \text{ d'où } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

D'autre part φ est la seule solution positive de l'équation :

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0,$$

d'où : $\varphi^2 = \varphi + 1$.

En divisant cette dernière relation par φ , on obtient :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

7 Racine sensible

Nous posons $y = x^2 - 3x$.

Alors y sera solution de l'équation :

$$y + 5\sqrt{y+76} = 260.$$

Isolons le radical afin de l'éliminer par une élévation au carré :

$$5\sqrt{y+76} = 260 - y$$

$$25(y+76) = 67\,600 - 520y + y^2$$

$$y^2 - 545y + 65\,700 = 0.$$

Le calcul de Δ donne :

$$\Delta = 34\,225 = 185^2;$$

d'où :

$$y = \frac{545 \pm 185}{2}.$$

D'où $y = 180$ ou $y = 365$.

Si l'on remplace y par 180 dans $y + 5\sqrt{y+76}$, on obtient 260. Donc cette solution convient.

En revanche, si l'on remplace y par 365 dans $y + 5\sqrt{y+76}$, on obtient 470. Donc cette solution ne convient pas (c'est une solution parasite introduite par l'élévation au carré).

Il suffit maintenant de résoudre $x^2 - 3x = 180$.

$$x^2 - 3x - 180 = 0.$$

On trouve $\Delta = 729 = 27^2$, d'où les solutions :

$$x' = 15 \text{ et } x'' = -12.$$

Conclusion : les solutions de cette équation sont 15 et -12.

8 Marketing

Désignons par n la variation du prix en euros ; le nouveau prix est maintenant de $(50 + n)$ euros (s'il s'agit d'une diminution de prix, n sera négatif). Le nombre d'abonnés a donc varié de $n \times 100$; il est maintenant de :

$$10\,000 - n \times 100$$

(si n est négatif, il s'agit d'une augmentation).

Le revenu mensuel R est obtenu en multipliant le nombre d'abonnés par le prix :

$$R = (10\,000 - n \times 100) \times (50 + n)$$

En développant les calculs, on obtient :

$$R = -100n^2 + 5\,000n + 500\,000$$

Il faut maintenant rechercher le maximum de ce trinôme du second degré.

Le coefficient du terme de plus haut degré est -100 donc négatif ce qui nous assure de la présence d'un maximum situé en :

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-5\,000}{2(-100)} = 25.$$

L'augmentation sera fixée à $n = 25$ euros, soit un prix de vente de $50 + 25 = 75$ euros.

Le revenu espéré sera alors de :

$$R = -100 \times (25)^2 + 5\,000 \times 25 + 500\,000 = 562\,500 \text{ euros.}$$

On peut aussi obtenir R en remarquant que le nombre d'abonnés est $10\,000 - 100 \times 25$, soit $7\,500$, d'où :

$$R = 7\,500 \times 75 = 562\,500 \text{ euros.}$$

9 Revoilà m !

Question 1

Assurons d'abord l'existence de racines distinctes en déterminant m pour que le discriminant soit strictement positif :

$$\Delta = (m+3)^2 - 4m(2m+1)$$

$$= m^2 + 6m + 9 - 8m^2 - 4m$$

$$\Delta = -7m^2 + 2m + 9$$

donc les racines évidentes sont

$$m' = -1 \text{ et } m'' = \frac{9}{7}.$$

Pour avoir $\Delta > 0$, il faut donc $-1 < m < \frac{9}{7}$.

Puisque désormais x' et x'' existent, calculons leur différence en posant $x' > x''$:

$$x' - x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}.$$

$$x' - x'' = 2 \text{ implique donc } \frac{\sqrt{\Delta}}{m} = 2, \text{ d'où :}$$

$$\sqrt{\Delta} - 2m \text{ et } \Delta = 4m^2.$$

Soit $-7m^2 + 2m + 9 = 4m^2$, soit enfin

$11m^2 - 2m - 9 = 0$; dont les racines évidentes sont :

$$m' = 1 \text{ et } m'' = -\frac{9}{11},$$

qui conviennent toutes les deux car contenues dans $]-1; \frac{9}{7}[$.

On vérifie que :

avec $m = 1$, $x' = 3$ et $x'' = 1$ ($3 - 1 = 2$) ;

$$\text{avec } m = -\frac{9}{11}, x' = -\frac{1}{3}$$

$$\text{et } x'' = -\frac{7}{3}, \text{ car } \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{7}{3}\right) = 2.$$

Question 2

La première idée est de faire $x = 5$ dans l'équation. Dans ce genre de question, il est plus astucieux d'utiliser les relations entre coefficients et les racines :

$$\text{le produit donne } 5 \times x'' = \frac{c}{a} = \frac{2m+1}{m};$$

$$\text{la somme donne } 5 + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{m+3}{m}.$$

Par suite :

$$x'' = \frac{2m+1}{5m} = \frac{m+3}{m} - 5$$

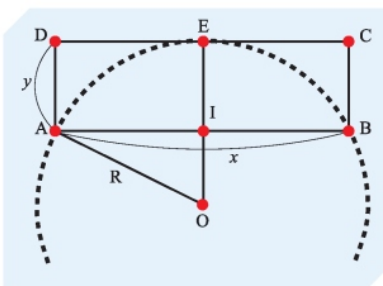
$$\frac{2m+1}{5m} = \frac{m+3-5m}{m}$$

$$2m+1 = -20m+15$$

$$m = \frac{14}{22} = \frac{7}{11}.$$

Alors :

$$x'' = \frac{2 \times \frac{7}{11} + 1}{5 \times \frac{7}{11}} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}.$$



En posant $AB = x$ et $AD = y$, il vient :
 $2x + 2y = 40$, soit $x + y = 20$.

Désignons par I le milieu de AB . Le triangle AOI est rectangle en I . Donc, $AO^2 = AI^2 + IO^2$,

$$\text{soit : } 10^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (y-10)^2$$

Or, on sait que $y = 20 - x$, donc :

$$10^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (20-x-10)^2$$

$$10^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (10-x)^2$$

$$100 = \frac{x^2}{4} + 100 - 20x + x^2$$

$$x^2 - 16x = 0, \text{ soit } x(x-16) = 0.$$

On obtient $x = 0$ qui est à rejeter puisque cette solution correspond à un rectangle aplati, et $x = 16$ donc $y = 4$.

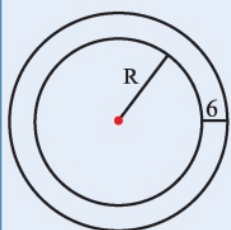
Conclusion : les côtés du rectangle mesurent 16 cm et 4 cm.

DU PLUS RAIDE

10 Algèbre et géométrie

Désignons par O le centre du cercle de rayon 10 passant par A , B et tangent en E au côté DC .

11 Deux sphères en une



Soit R le rayon de la sphère intérieure. Son volume est :

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Le volume de la sphère extérieure est

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi (R + 6)^3.$$

Le volume de métal est donc :

$$V = V_2 - V_1 = \frac{4}{3} \pi ((R + 6)^3 - R^3).$$

La masse volumique donne un autre moyen de calculer ce même volume de métal :

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{72\,000}{8} = 9\,000 \text{ cm}^3.$$

$$\text{On écrit donc : } \frac{4}{3} \pi ((R + 6)^3 - R^3) = 9\,000.$$

Calculons avec ardeur :

$$R^3 + 3R^2 \times 6 + 3R \times 6^2 + 216 - R^3 = \frac{27\,000}{4\pi}$$

$$\text{soit, } 18R^2 + 108R + 216 = 2\,148,591732.$$

$$\text{En divisant par 18 : } R^2 + 6R - 107,3662073 = 0$$

$$\text{dont } \Delta' = 9 + 107,366... = 116,366...$$

$$= 10,78731697^2.$$

$$\text{Ce qui conduit à } R = -3 \pm 10,7873...$$

$$\text{et comme il faut bien que } R > 0,$$

$$\text{finalement } R = -3 + 10,7873...$$

Conclusion : le rayon de la sphère intérieure est 7,787316966 ; celui de la sphère extérieure est 13,787316966. Tout ça en cm, bien sûr.

12 Les parents boivent, les enfants comptent

Soit x la contenance de la première pièce en litres.

La seconde pièce contiendra $x + 15$ litres et la troisième contiendra $x + 5$ litres. Le prix du litre de la première pièce est, de par l'énoncé :

$$x \times \frac{1}{2} = \frac{x}{2} \text{ centimes.}$$

Celui de la deuxième pièce est $\frac{x}{2} + 5$ centimes.

Celui de la troisième pièce est $\frac{x}{2} + 10$ centimes.

Le prix est donc : $x(\frac{x}{2})$ pour la 1^{re} pièce ;

$$(x + 15)(\frac{x}{2} + 5) \text{ pour la 2^e pièce ;}$$

$$(x + 5)(\frac{x}{2} + 10) \text{ pour la 3^e pièce.}$$

D'où :

$$x(\frac{x}{2}) + (x + 15)(\frac{x}{2} + 5) + (x + 5)(\frac{x}{2} + 10) = 78\,225.$$

(Attention : 78 225 centimes.)

Soit :

$$\frac{1}{2}[x^2 + (x + 15)(x + 10) + (x + 5)(x + 20)] = 78\,225$$

$$x^2 + (x + 15)(x + 10) + (x + 5)(x + 20) = 156\,450$$

$$3x^2 + 50x + 250 = 156\,450$$

$$3x^2 + 50x - 156\,200 = 0.$$

D'où $x = -236,667$ ou $x = 220$.

Une contenance négative étant impossible, la solution est :

la 1^{re} pièce contient 220 litres ;

la 2^e pièce contient 235 litres ;

la 3^e pièce contient 225 litres.

13 Pauvres et riches

Désignons par x le taux d'intérêt de la première année.

À la fin de la première année la dette de M. Fauché est composée comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{intérêt + capital} \\ 30\,000x + 30\,000 \end{array}$$

M. Fauché rembourse 20 075 euros. Donc le capital restant dû est :

$$30\,000x + 30\,000 - 20\,075 = 9\,925 + 30\,000x = C.$$

À la fin de la deuxième année, la dette de M. Fauché est composée comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{intérêt + capital} \\ C(x + 0,01) + C \end{array}$$

(car le taux d'intérêt est celui de l'année précédente majoré de 1 % = 0,01). Or, la somme de

11 788 euros éteint la dette. Donc :

$$C(x + 0,01) + C = 11\,788.$$

Remplaçons C par sa valeur :

$$(9\,925 + 30\,000x) \times (x + 0,01) + (9\,925 + 30\,000x) = 11\,788.$$

On développe :

$$30\,000x^2 + 40\,225x - 1\,763,75 = 0 \text{ avec } x > 0.$$

Le calcul de delta donne :

$$\Delta = 1\,829\,700\,625 = 42\,775^2.$$

D'où les solutions $x = 0,0425$ et $x = -1,38333...$

La première solution est bien sûr la seule acceptable, un taux d'intérêt négatif n'est pas concevable.

Conclusion : le taux d'intérêt de la première année est de 4,25 %, celui de la deuxième année est de 5,25 %.

14 On demande triangle d'urgence

Désignons par A, B, C les sommets du triangle. Posons $AB = x$ et $AC = y$ qui sont les longueurs des côtés de l'angle droit. Appelons z la longueur de l'hypoténuse.

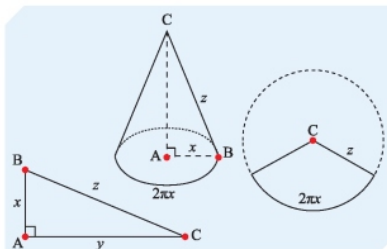
On peut écrire :

$$x + y + z = 156 \text{ et } x^2 + y^2 = z^2.$$

La surface du cône engendré par la rotation de BC autour de AC est πxz . Celle du cône engendré par la rotation de BC autour de AB est πyz .



»



D'où $\pi xz + \pi yz = 5915\pi$; après simplification par π , on obtient $xz + yz = 5915$, soit $(x+y)z = 5915$.
Il suffit de poser $t = x+y$ pour obtenir $z + t = 156$ et $zt = 5915$.

Ces deux nombres z et t , s'ils existent, sont des solutions de l'équation :

$$X^2 - 156X + 5915 = 0.$$

D'où $X = 91$ ou $X = 65$.

Comme on doit avoir $z < x+y$, on choisit nécessairement $z = 65$ et $t = x+y = 91$.

Il reste à trouver x et y dont on connaît la somme $x+y = 91$.

Cherchons à évaluer le produit xy .

On sait que $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, d'où :

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} = \frac{91^2 - 65^2}{2} = 2028.$$

Nous sommes de nouveau ramenés à trouver deux nombres dont on connaît la somme 91 et le produit 2028. Ces deux nombres x et y , s'ils existent, sont des solutions de l'équation $X^2 - 91X + 2028 = 0$. D'où $X = 52$ ou $X = 39$.

Conclusion : les côtés de ce triangle ont pour longueur 39, 52 et 65.

15 Jouons avec les entiers (1)

• 1) Commençons par évaluer :

$$\begin{aligned} P(x+1) - P(x) &= a(x+1)^2 + b(x+1) - ax^2 - bx \\ &= a(x^2 + 2x + 1) + bx + b - ax^2 - bx \\ &= ax^2 + 2ax + a + bx + b - ax^2 - bx \\ &= 2ax + a + b \end{aligned}$$

Or, on veut que $P(x+1) - P(x) = x$, c'est-à-dire que $2ax + a + b = x$ pour toute valeur de x . Pour cela il faut avoir séparément $2a = 1$ et $a + b = 0$.

D'où on tire facilement $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.
Ainsi $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$.

• 2) Il suffit maintenant de remarquer que :

$$\begin{aligned} 1 &= P(2) - P(1) \\ + \\ 2 &= P(3) - P(2) \\ + \\ 3 &= P(4) - P(3) \\ + &\dots \\ + &\dots \\ + &\dots \\ n-1 &= P(n) - P(n-1) \\ + \\ n &= P(n+1) - P(n) \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre toutes ces égalités, on obtient :

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = P(n+1) - P(1).$$

Or, d'après le résultat précédent :

$$\begin{aligned} P(n+1) - P(1) &= \left[\frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) \right] - \left[\frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{2} \times 1 \right] \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1 - n - 1) \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

D'où :

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

16 Champions de Grenoble

Soit x le nombre de joueurs.

Calculons le nombre de parties :

- Le premier joueur rencontre $x-1$ joueurs.
- Le deuxième joueur rencontre $x-2$ joueurs puisqu'il a déjà rencontré le premier joueur.
- Le troisième joueur rencontre $x-3$ joueurs puisqu'il a déjà rencontré le premier et le deuxième joueur.

Et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernier joueur auquel il ne restera que le dernier joueur à rencontrer.

D'après le résultat de l'exercice précédent, le nombre de parties est donc :

$$(x-1) + (x-2) + (x-3) + \dots + 1 = \frac{x(x-1)}{2}.$$

Le nombre de parties est aussi de $\frac{J}{2} + \frac{R+V}{2}$,

si J désigne le nombre de cartons jaunes, R le nombre de cartons rouges, V le nombre de cartons verts.

Donc :

$$\frac{x(x-1)}{2} = \frac{J}{2} + \frac{R+V}{2} = \frac{752}{2} + \frac{752+752}{2} = 1128.$$

Soit : $x(x-1) = 2 \times 1128 = 2256$.

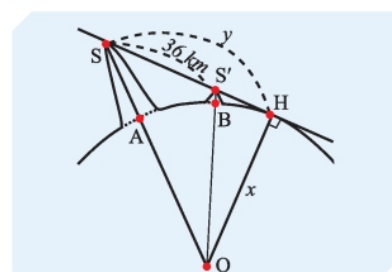
D'où : $x^2 - x - 2256 = 0$,

dont : $\Delta = 1 + 9024 = 9025 = 95^2$.

Ce qui conduit à $x' = 48$ ou $x'' = -47$.

Bien sûr le nombre de joueurs est égal à 48.

17 La terre en deux pics



Plaçons les points comme indiqué sur la figure et prenons comme unité le km. On sait que :

$$SA = 2 ; S'B = 1,2 ; SS' = 36.$$

Posons $x =$ rayon de la terre (supposée sphérique), donc :

$$x = OH = OA = OB \text{ et } SH = y.$$

Dans le triangle rectangle SOH, Pythagore nous affirme que :

$$x^2 + y^2 = (x+2)^2.$$

Dans le triangle rectangle S'OH, ce même Pythagore nous affirme que :

$$(y-36)^2 + x^2 = (x+1,2)^2.$$

Il suffit d'éliminer y entre ces deux équations pour en obtenir une où l'inconnue sera x , que l'on cherche.

De la première on tire :

$$y^2 = (x+2)^2 - x^2 = 4x+4.$$

De la seconde on tire :

$$\begin{aligned} (y-36)^2 &= (x+1,2)^2 - x^2 \\ y^2 - 72y + 1296 &= 2,4x + 1,44 \end{aligned}$$

or, $y^2 = 4x+4$

$$\begin{aligned} \text{donc } 4x+4 - 72y + 1296 &= 2,4x + 1,44 - 72y \\ &= -1,6x - 1298,56. \end{aligned}$$



$$y = \frac{1,6x + 1\,298,56}{72}$$

Nous remplaçons dans l'expression $y^2 = 4x + 4$:

$$\left(\frac{1,6x + 1\,298,56}{72}\right)^2 = 4x + 4$$

$$2,56x^2 + 4\,155,392x + 1\,686\,258,074 = 20\,736x + 20\,736$$

enfin :

$$x^2 - 6\,476,8x + 650\,594,5602 = 0.$$

Le calcul de Δ' donne :

$$\Delta' = 9\,836\,640 = 3\,136,341818^2.$$

Alors les solutions sont :

$$x' = 6\,374,74 \text{ et } x'' = 102,058.$$

Mais pour que l'une de ces valeurs soit acceptable, il faut que la valeur correspondante de y soit supérieure à 36.

Il faut donc qu'en remplaçant x par sa valeur dans $y^2 = 4x + 4$ on obtienne un nombre supérieur à 36^2 . C'est le cas avec x' mais pas avec x'' .

Conclusion : le rayon de la terre mesure 6 374,74 km.

18 Jouons avec les entiers (2)

Pour plus de simplicité dans les calculs, désignons par $x-1$ le plus petit de ces quatre entiers consécutifs.

Le produit de nos quatre entiers consécutifs, aug-

menté de 1, sera $(x-1)x(x+1)(x+2) + 1$, et nous allons chercher à prouver que ce polynôme est le carré d'un polynôme, lequel sera nécessairement du second degré.

Effectuons :

$$(x-1)x(x+1)(x+2) + 1 = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

Si ce polynôme est le carré d'un polynôme, celui-ci sera du second degré, et plus précisément de la forme :

$$x^2 + mx + 1 \text{ ou } x^2 + mx - 1,$$

à cause des coefficients extrêmes 1 et 1.

On a :

$$(x^2 + mx + 1)^2 = x^4 + 2mx^3 + (m^2 + 2)x^2 + 2mx + 1,$$

qui ne peut convenir, puisque les coefficients de x^3 et de x sont les mêmes, alors qu'ils devraient être opposés.

Il ne reste donc que la possibilité :

$$(x^2 + mx - 1)^2 = x^4 + 2mx^3 + (m^2 - 2)x^2 - 2mx + 1,$$

qui donne le polynôme voulu pour $m = 1$.

Il est ainsi prouvé que :

$$(x-1)x(x+1)(x+2) + 1 = (x^2 + x - 1)^2,$$

égalité de deux polynômes, valable pour tout x réel et *a fortiori* pour tout x entier.

Pour tout x entier, le nombre $x^2 + x - 1$ est un nombre entier, et la propriété demandée est démontrée.

DUR, DUR

19 Max la bricole

On cherche les longueurs $OA = x$ et $OB = y$.

Quand la tablette est rabattue (voir figure 1), le triangle OAB est rectangle en O , ce qui se traduit par le théorème de Pythagore $OA^2 + OB^2 = AB^2$, soit $x^2 + y^2 = (a+b)^2$.

Quand la tablette est repliée, on a

$AB = OA - OB = IA - IB$ (voir figure 3), ce qui se traduit par $x - y = a - b$.

Un calcul classique d'identité remarquable fournit l'égalité :

$$(a-b)^2 = (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = (a+b)^2 - 2xy,$$

$$\text{d'où } 2xy = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab,$$

$$\text{soit } xy = 2ab.$$

Il s'ensuit que les nombres x et $z = -y$ sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x + z = a - b \\ xz = -2ab \end{cases}$$

Ils sont donc les racines de l'équation :

$$X^2 - (a-b)X - 2ab = 0.$$

Ces racines sont :

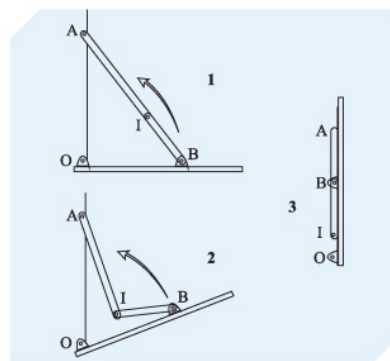
$$X = \frac{1}{2}(a-b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 8ab}).$$

La racine positive est x , la négative est $z = -y$.

On en conclut :

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{(a-b)^2 + 8ab} + (a-b))$$

$$y = \frac{1}{2}(\sqrt{(a-b)^2 + 8ab} - (a-b)).$$



20 Jouons avec les entiers (3)

Supposons que la réponse soit « oui ». On a dans ce cas :

$$3n^2 + 3n + 7 = m^3,$$

où m est un entier. Quand on divise un entier m par 3, on peut trouver trois restes possibles : 0, 1, 2. Dans chacun de ces trois cas, on peut vérifier que m^3 admet le même reste que m dans la division par 3. Le reste dans la division par 3 de $3n^2 + 3n + 7$ est 1. Le reste de m^3 est donc 1, et le reste de m est le même, c'est 1. Cela signifie que l'on peut poser :

$$m = 3q + 1 \text{ (avec } q \text{ entier).}$$

Il en résulte :

$$3n^2 + 3n + 7 = (3q + 1)^3.$$

En développant ce calcul et en simplifiant, on trouve :

$$n^2 + n + 2 = 3(3q^3 + 3q^2 + q).$$

L'entier $n^2 + n + 2$ doit donc être divisible par 3.

Mais si nous considérons les trois restes possibles de n par 3, nous pouvons vérifier que :

– si ce reste est 0, alors celui de $n^2 + n + 2$ est 2,

– si ce reste est 1, alors celui de $n^2 + n + 2$ est 1,

– si ce reste est 2, alors celui de $n^2 + n + 2$ est 2.

Ce qui revient à dire que le reste par 3 de $n^2 + n + 2$ ne peut jamais être 0, c'est-à-dire que $n^2 + n + 2$ ne peut être divisible par 3.

On aboutit à une impossibilité, ce qui signifie que la réponse est « non » : si n est un entier, le nombre $3n^2 + 3n + 7$ ne peut être le cube d'un entier.

21 Jouons avec les entiers (4)

Le problème revient à ceci : quelles valeurs peut-on attribuer au réel x pour que le système

$x + y + z = 3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ait au moins une solution ? Nous allons donc résoudre ce système en considérant x et y comme les inconnues et z comme un paramètre. Ce système équivaut à :

$$\begin{cases} y = 3 - z - x, \\ x^2 + (3 - z - x)^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

Après réduction, cette seconde équation s'écrit :

$$2x^2 - 2(3 - z)x + 2z^2 - 6z + 5 = 0.$$

C'est une équation du second degré à l'inconnue x , avec z pour paramètre.

Le discriminant réduit de cette équation est :

$$\Delta'(z) = (3 - z)^2 - 4z^2 + 12z - 10$$

$$\Delta'(z) = -3z^2 + 6z - 1$$

Les racines du trinôme $\Delta'(z)$ sont $1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$.

On aura $\Delta'(z) > 0$ si et seulement si :

$$1 - \sqrt{\frac{2}{3}} < z < 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Dans ce cas, et dans ce cas seulement, l'équation :

$$2x^2 - 2(3 - z)x + 2z^2 - 6z + 5 = 0,$$

aura des solutions en x , et il existera par conséquent x et y vérifiant simultanément :

$$x + y + z = 3, x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

La plus grande valeur possible de z est donc :

$$1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \cong 1,8165,$$

et la plus petite est :

$$1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \cong 0,1835.$$

Interprétation géométrique

L'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ représente, dans un repère orthonormal $Oxyz$, une sphère de centre O

et de rayon 2, et l'équation $x + y + z = 3$ représente un plan dans ce même repère. Les triplets de réels (x, y, z) qui vérifient simultanément ces deux équations sont les coordonnées des points d'intersection de cette sphère et de ce plan. L'ensemble de ces points d'intersection est un cercle. Le problème consistait à trouver les points de ce cercle qui ont la plus grande et la plus petite cote (coordonnée z).

23 La vérité est dans le puits

Soit t_1 le temps de chute de la pierre, et t_2 le temps que met le son à remonter. On a $t_1 + t_2 = t$ où t est donné, avec $t > 0$. Soit x la profondeur du puits. Si « je laisse tomber » la pierre, c'est que je ne lui imprime pas de vitesse initiale, d'où :

$$x = \frac{1}{2}gt_1^2.$$

Enfin, la remontée du son donne l'équation $x = Vt_2$. Tel est le système à résoudre, où t, g, V sont des paramètres donnés, et t_1, t_2, x sont les inconnues.

22 Jouons avec les entiers (5)

L'équation proposée équivaut à :

$$a^2 = (a + n + 1)^2 - (a + 1)^2 + (a + n + 2)^2 - (a + 2)^2 + \dots + (a + 2n)^2 - (a + n)^2.$$

Calculons en utilisant :

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

$$(2a + 2 + n)n + (2a + 4 + n)n + \dots + (2a + 2n + n)n = a^2.$$

$$\text{Soit } n(2an + n^2 + 2(1 + 2 + \dots + n)) = a^2$$

$$\text{où } 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

$$\text{d'où } n(2an + n^2 + n(n + 1)) = a^2 \text{ et } 2an^2 + 2n^3 + n^2 = a^2.$$

L'équation proposée s'écrit donc :

$$a^2 - 2n^2a - (2n^3 + n^2) = 0$$

où l'entier n est supposé donné. C'est bien une équation du second degré d'inconnue a .

Son discriminant réduit est $\Delta' = n^4 + 2n^3 + n^2$ (strictement positif) et ses racines :

$$a = n^2 \pm \sqrt{n^4 + 2n^3 + n^2}.$$

L'énoncé demande une valeur positive, donc seule convient :

$$a = n^2 + \sqrt{n^4 + 2n^3 + n^2} = n^2 + n\sqrt{n^2 + 2n + 1} = n^2 + n(n + 1) = 2n^2 + n.$$

Conclusion : pour chaque entier $n > 1$, il existe un seul entier $a > 1$ qui satisfait à l'équation proposée, et cet entier est :

$$a = 2n^2 + n.$$

Pour $n = 1$, on trouve $a = 3$, et pour $n = 2$, on trouve $a = 10$, qui sont les valeurs correspondant aux deux exemples donnés dans l'énoncé.

On procède par substitutions :

$$t_2 = \frac{x}{V}, \quad t_1 = t - t_2 = t - \frac{x}{V}, \quad x = \frac{1}{2} g \left(t - \frac{x}{V} \right)^2.$$

Cette dernière équation est du second degré et s'écrit :

$$x^2 - 2V \left(t + \frac{V}{g} \right) x + t^2 V^2 = 0.$$

Elle se résout selon la méthode classique, avec :

$$\Delta' = V^2 \left(t + \frac{V}{g} \right)^2 - t^2 V^2 = \frac{V^4}{g^2} \left(1 + \frac{2gt}{V} \right)$$

et ses racines sont :

$$x = V \left(t + \frac{V}{g} \right) \pm \frac{V^2}{g} \sqrt{\frac{2gt}{V} + 1}.$$

Les deux racines conviennent-elles ? Si l'on choisit le signe + devant la racine carrée, on trouvera $x > Vt$, soit $t_2 > t$, et $t_1 < 0$. Cette solution ne convient pas. Le problème n'a qu'une solution :

$$x = V \left(t + \frac{V}{g} \right) - \frac{V^2}{g} \sqrt{\frac{2gt}{V} + 1}$$

soit :

$$x = Vt + \frac{V^2}{g} \left(1 - \sqrt{\frac{2gt}{V} + 1} \right)$$

L'application numérique conduit à $x \cong 109$ m.

24 Fonction de fonction

Il serait maladroit de développer le polynôme $f(f(x))$ pour écrire l'équation polynomiale $f(f(x)) = x$, qui serait du quatrième degré, non bicarrée. Bien sûr, on dispose de méthodes pour résoudre une telle équation, comme la méthode de Ferrari, mais ce ne sont pas des méthodes élémentaires, elles ne sont généralement plus enseignées. Mieux vaut tirer partie des particularités de l'équation proposée.

Posons $y = f(x)$, d'où $f(y) = f(f(x)) = x$.

L'équation proposée équivaut au système :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases}$$

Ce système s'écrit :

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 7x + 2 \\ x = 2y^2 + 7y + 2 \end{cases}$$

Il équivaut au système obtenu en soustrayant ces deux équations et en adjoignant à cette différence l'une des deux équations, au choix :

$$\begin{cases} y - x = 2(x^2 - y^2) + 7(x - y) \\ y = 2x^2 + 7x + 2 \end{cases}$$

Dans l'équation $y - x = 2(x^2 - y^2) + 7(x - y)$, on

peut factoriser $x - y$, ce qui permet de l'écrire :

$$(x - y)(2x + 2y + 8) = 0,$$

ou

$$2(x - y)(x + y + 4) = 0.$$

D'où deux cas :

Premier cas : $x - y = 0$, soit $y = x$. Le système devient :

$$\begin{cases} y = x \\ x = 2x^2 + 7x + 2 \end{cases}$$

Cette équation du second degré s'écrit $x^2 + 3x + 1 = 0$, elle a pour solutions :

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

et pour chacune d'elles, on a $y = x$.

Second cas : $x + y + 4 = 0$, soit $y = -x - 4$.

Le système devient :

$$\begin{cases} y = -x - 4 \\ -x - 4 = 2x^2 + 7x + 2 \end{cases}$$

soit $2x^2 + 8x + 6 = 0$.

Cette équation du second degré s'écrit $x^2 + 4x + 3 = 0$, dont les solutions évidentes sont $x = -1$ et $x = -3$, et pour chacune d'elles, on a $y = -x - 4$.

Conclusion : l'équation proposée a quatre solutions :

$$\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, -1, -3.$$

25 Barres parallèles

Soit :

$$f(x) = a + \frac{b}{x} = \frac{ax + b}{x}.$$

L'équation qui correspond à une barre de fraction est : $f(x) = x$, équivalente à :

$$x^2 - ax - b = 0,$$

qui est une équation du second degré, qui a deux racines distinctes puisque son discriminant est $a^2 + 4b$, strictement positif par hypothèse.

Ces racines sont :

$$x' = \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + 4b})$$

et

$$x'' = \frac{1}{2} (a - \sqrt{a^2 + 4b}).$$

L'équation proposée :

$$a + \frac{b}{a + \frac{b}{\dots \frac{b}{a + \frac{b}{x}}}} = x$$

(avec n barres de fractions) n'est autre que :

$$f(f(f(\dots f(x)\dots))) = x \text{ avec } n \text{ fois « } f \text{ »}.$$

Soit $f^{\circ} f^{\circ} \dots^{\circ} f(x) = x$, où le symbole $f^{\circ} f^{\circ} \dots^{\circ} f$ désigne la fonction obtenue en composant n fois la fonction f avec elle-même, fonction que l'on peut noter aussi : f^n . Il est clair que tout réel x vérifiant $f(x) = x$ vérifie aussi $f(f(x)) = x$, et ainsi de suite : les deux racines réelles distinctes x' et x'' de l'équation $f(x) = x$ sont donc solutions de l'équation proposée $f^n(x) = x$. Mais celle-ci peut-elle avoir d'autres solutions ? La fonction f est une fonction *homographique*, du type :

$$h(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Si vous composez deux fonctions homographiques, qu'obtenez-vous ?

Soient :

$$h(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ et } g(x) = \frac{a'x + b'}{c'x + d'};$$

alors, la composée $g^{\circ} h(x)$ s'exprime par :

$$g^{\circ} h(x) = g(h(x)) = \frac{(a'a + b'c)x + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)x + (c'b + d'd)}.$$

Il apparaît que la composée de deux fonctions homographiques est homographique. Il en est donc de même de la composée de n fonctions homographiques.

Notre fonction $f^n = f^{\circ} f^{\circ} \dots^{\circ} f$ est donc homographique :

$$f^n = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n},$$

et l'équation proposée se met sous la forme :

$$\frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n} = x$$

soit $c_n x^2 + (d_n - a_n)x - b_n = 0$.

C'est une équation du second degré, qui a au plus deux solutions (ceci est toujours vrai car les trois coefficients ne peuvent être nuls en même temps). Comme nous savons déjà qu'elle a les deux solutions distinctes x' et x'' , elle n'en peut avoir d'autres.

Les solutions de l'équation proposée sont donc :

$$x' = \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + 4b}),$$

$$\text{et } x'' = \frac{1}{2} (a - \sqrt{a^2 + 4b}).$$

26 Aussi beau que méchant

• a) On a $(x^2 + \frac{1}{2}x)^2 = x^4 + x^3 + \frac{1}{4}x^2$, d'où :

$y^2 - (x^2 + \frac{1}{2}x)^2 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - (x^4 + x^3 + \frac{1}{4}x^2) = \frac{3}{4}x^2 + x + 1$
trinôme à discriminant négatif, donc trinôme toujours (strictement) positif (signe de a).

De même :

$$(x^2 + \frac{1}{2}x + 1)^2 = x^4 + x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x + 1,$$

ce qui implique :

$$(x^2 + \frac{1}{2}x + 1)^2 - y^2 = (x^4 + x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x + 1) - (x^4 + x^3 + \frac{3}{4}x^2 + x + 1) = \frac{5}{4}x^2 > 0$$

car $x \neq 0$.

On a ainsi prouvé que $(x^2 + \frac{1}{2}x) < y^2 < (x^2 + \frac{1}{2}x + 1)^2$, soit :

$$x^2 + \frac{1}{2}x \leq |x^2 + \frac{1}{2}x| < |y| < |x^2 + \frac{1}{2}x + 1|.$$

Comme le discriminant du trinôme $x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ est négatif, ce trinôme est toujours positif, d'où :

$$|x^2 + \frac{1}{2}x + 1| = x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

et l'on a prouvé :

$$x^2 + \frac{1}{2}x < |y| < x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

• b) La double inégalité que nous venons d'établir s'écrit :

$$2x^2 + x < 2|y| < 2x^2 + x + 2.$$

Si le réel x est un entier, alors il n'y a qu'un seul entier strictement compris entre les entiers $2x^2 + x$ et $2x^2 + x + 2$, et cet entier est : $2x^2 + x + 1$.

Si le réel y est aussi un entier, ceci implique :

$$2|y| = 2x^2 + x + 2$$

soit :

$$|y| = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

L'égalité $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$ devient alors :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2})^2,$$

soit :

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0,$$

ou encore :

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

équation du second degré dont les racines évidentes sont $x = -1$ et $x = 3$.

Pour $x = -1$,

on a $y^2 = 1$,

d'où $y = \pm 1$.

Pour $x = 3$,

on a $y^2 = 121$,

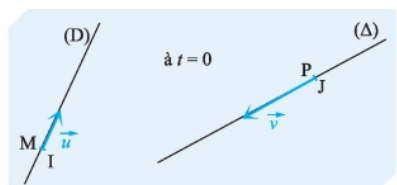
d'où $y = \pm 11$.

Remarque. Si l'on rajoute $x = 0$, $y = \pm 1$, on a trouvé tous les couples solutions de l'équation diophantienne en nombres entiers :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2.$$

27 Le dernier pour la SNCF

Soient M et P ces mobiles, dont les trajectoires sont les droites respectives D et Δ situées dans un même plan.



Soient :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v}$$

les vecteurs-vitesses respectifs de ces mobiles : ce sont des vecteurs constants, respectivement parallèles aux droites D et Δ . Prenons 12 h comme instant 0, et supposons qu'à cet instant, le mobile M est en I (sur D) et le mobile P est en J (sur Δ). À l'instant t (en heures), on a :

$$\overrightarrow{IM} = t\vec{u} \text{ et } \overrightarrow{JP} = t\vec{v}$$

il en résulte :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JP} = -t\vec{u} + \overrightarrow{IJ} + t\vec{v}.$$

Le carré MP^2 de la distance MP est égal au carré scalaire :

$$\overrightarrow{MP}^2 = (-t\vec{u} + \overrightarrow{IJ} + t\vec{v})^2 = t^2\|\vec{u}\|^2 + \|\overrightarrow{IJ}\|^2 + t^2\|\vec{v}\|^2 - 2t\vec{u} \cdot \overrightarrow{IJ} + 2t\vec{v} \cdot \overrightarrow{IJ} - 2t^2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Si l'on n'aime pas les vecteurs et le produit scalaire, on peut distinguer deux cas, selon que les trajectoires D et Δ sont concourantes en un point O ou parallèles. Dans le premier cas, on applique le théorème de Pythagore généralisé dans le triangle OMP . Dans le second, on fait intervenir une perpendiculaire commune UV qui permet de calculer MP^2 avec le théorème de Pythagore.

Que l'on procède comme ci ou comme ça, il apparaît que le carré MP^2 de la distance de nos deux mobiles est une fonction du second degré du temps t , une fonction de la forme $MP^2 = at^2 + bt + c$, où a , b , c sont des réels constants. C'est là le fait important.

D'après l'énoncé

pour $t = 0$ (à 12 h), on a $MP^2 = 1$;

pour $t = 1$ (à 13 h), on a $MP^2 = 4$;

pour $t = 2$ (à 14 h), on a $MP^2 = 16$.

Il en résulte $c = 1$, $a + b + c = 4$, $4a + 2b + c = 16$.

On en déduit illico : $a = \frac{9}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = 1$,

et par suite : $MP^2 = \frac{9}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1$.

La distance MP sera minimum pour : $t = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{6}$, et à cet instant, on a : $MP^2 = \frac{7}{8}$.

Comme 1/6 d'heure représente 10 minutes, cet événement se produira à 12 h 10 min, et la distance minimum (en km) sera :

$$\sqrt{\frac{7}{8}}, \text{ soit : } 0,935 \text{ km.}$$

Dans le cas où les deux trajectoires D et Δ ne sont plus situées dans un même plan, le calcul vectoriel précédent reste encore valable, car dans ce calcul, rien ne spécifiait que les vecteurs :

$$\vec{u}, \overrightarrow{IJ}, \vec{v}$$

soient coplanaires (liés). Dans ce cas, le carré MP^2 est toujours donné par la même formule :

$MP^2 = at^2 + bt + c$. Ici encore, si l'on n'aime pas les vecteurs, on peut faire intervenir la perpendiculaire commune aux droites non coplanaires D et Δ , etc. La formule est la même, et le résultat est le même. ■

ABONNEZ-VOUS À SCIENCE & VIE

*Retrouvez toutes nos offres
d'abonnement et de nombreux avantages !*

KIOSQUE
mag

Disponible sur
www.Kiosquemag.com



Jusqu'à
50%
de réduction

Les clés pour comprendre
le monde d'aujourd'hui et de demain !



△

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRE

△